

# 压水堆稳态堆芯分析计算程序

## Bamboo-Core V 1.1

### 理论手册

## PWR Steady-state Core Analysis Calculation Code

## THEORY MANUAL

编写： 杨文敬

校对： 李云召

审核： 曹良志

批准： 吴宏春

西安交通大学

核工程计算物理实验室

2017年7月

---

## 文档历史记录

文档版本号	NECP 内部文档统一编码	发布时间	作者	校对 人	审核 人
V 1.1	2017-511	2017.7.18			

# 目 录

1. 程序简介 .....	1
2. 程序概述 .....	2
3. 群常数接口处理 .....	4
3.1. 最小二乘拟合方法 .....	4
3.2. 组合方式 .....	5
3.3. 毒物对宏观截面的影响 .....	6
4. 变分节块扩散计算 .....	7
4.1. 中子扩散方程的变分原理和 RITZ 离散 .....	7
4.2. 算子形式的变分节块方法 .....	10
4.3. 迭代计算过程 .....	11
4.4. 加速方法 .....	14
4.4.1 Lyusternik-Wagner 外推加速收敛技术 .....	14
4.4.2 多重迭代优化技术 .....	15
5. 功率与临界计算 .....	18
5.1. 堆芯功率计算 .....	18
5.1.1 归一化因子 .....	18
5.1.2 相对中子通量密度和相对功率密度 .....	18
5.1.3 绝对中子通量密度和绝对功率密度 .....	18
5.2. 临界硼浓度搜索 .....	19
5.2.1 硼浓度调节 .....	19
5.2.2 松弛因子的应用 .....	19
6. 燃耗计算 .....	20
6.1. 堆芯内某处的燃耗深度 .....	20
6.2. 毒物的核子密度 .....	20
7. 动力学参数计算 .....	22
7.1. 点堆参数 .....	22
7.1.1 平均中子通量密度 .....	22
7.1.2 平均中子速度 .....	22
7.1.3 平均宏观裂变截面和平均宏观吸收截面 .....	22
7.1.4 无限介质增值因数 .....	22
7.2. 动力学参数 .....	23
7.2.1 缓发中子份额 .....	23
7.2.2 瞬发中子先驱核的衰变常数 .....	23
7.3. 反应性反馈系数 .....	24

---

8. 历史效应修正 .....	25
8.1. 微观燃耗修正 .....	27
8.2. 基于重要核素的能谱修正 .....	30
8.3. 复合修正 .....	33
9. 控制棒尖齿效应 .....	36
9.1. 自适应网格方法 .....	39
9.2. 广义等效均匀化方法 .....	40
9.3. 近似通量体积权重方法 .....	44
参考文献 .....	47
附录-空间正交多项式函数系 .....	48

## 1. 程序简介

- (1) 程序名称: **Bamboo-Core**
- (2) 使用机型: **Intel(R) Core(TM) i7-3770 CPU @3.40GHz**
- (3) 操作系统: **Windows 系统**
- (4) 程序语言: **Fortran 95**
- (5) 编译环境: **Intel Visual Fortran Composer XE 2013**
- (6) 功能简介: 压水堆稳态堆芯分析计算程序 **Bamboo-Core**, 以先进的变分节块方法求解中子扩散方程为基础, 考虑了堆芯内的燃料温度、慢化剂温度和冷却剂密度对反应性的影响, 包括堆芯临界搜索、动力学参数计算、毒物核子密度计算、燃耗计算、控制棒价值计算、反应性系数计算、微观燃耗计算等模块, 可计算功率分布、循环长度、燃耗深度、毒物及其先驱核以及各种核素的原子核密度的分布、点堆和时空动力学参数、反应性反馈系数、控制棒价值等, 且具有换料及换料期间的衰变计算功能。

## 2. 程序概述

在反应堆换料的设计优化、运行跟踪以及核电厂模拟仿真等许多方面都需要进行堆芯计算。为了准确有效地进行堆芯计算，对于压水堆通常采用求解中子扩散方程获得精确的中子通量分布，以便考虑随燃耗变化多种局部反馈对截面的影响。

压水堆稳态堆芯分析程序 **Bamboo-Core**，以先进的变分节块方法求解中子扩散方程为基础，考虑了堆芯内的燃料温度、慢化剂温度和冷却剂密度对反应性的影响，包括堆芯内临界搜索、动力学参数计算、毒物核子密度计算、燃耗计算、控制棒价值计算、反应性系数计算等模块，可计算功率分布、循环长度、燃耗深度、毒物及其先驱核的分布、点堆和时空动力学参数、反应性反馈系数、控制棒价值等，且具有换料功能。

**Bamboo-Core** 程序的计算流程如图 2-1 所示。

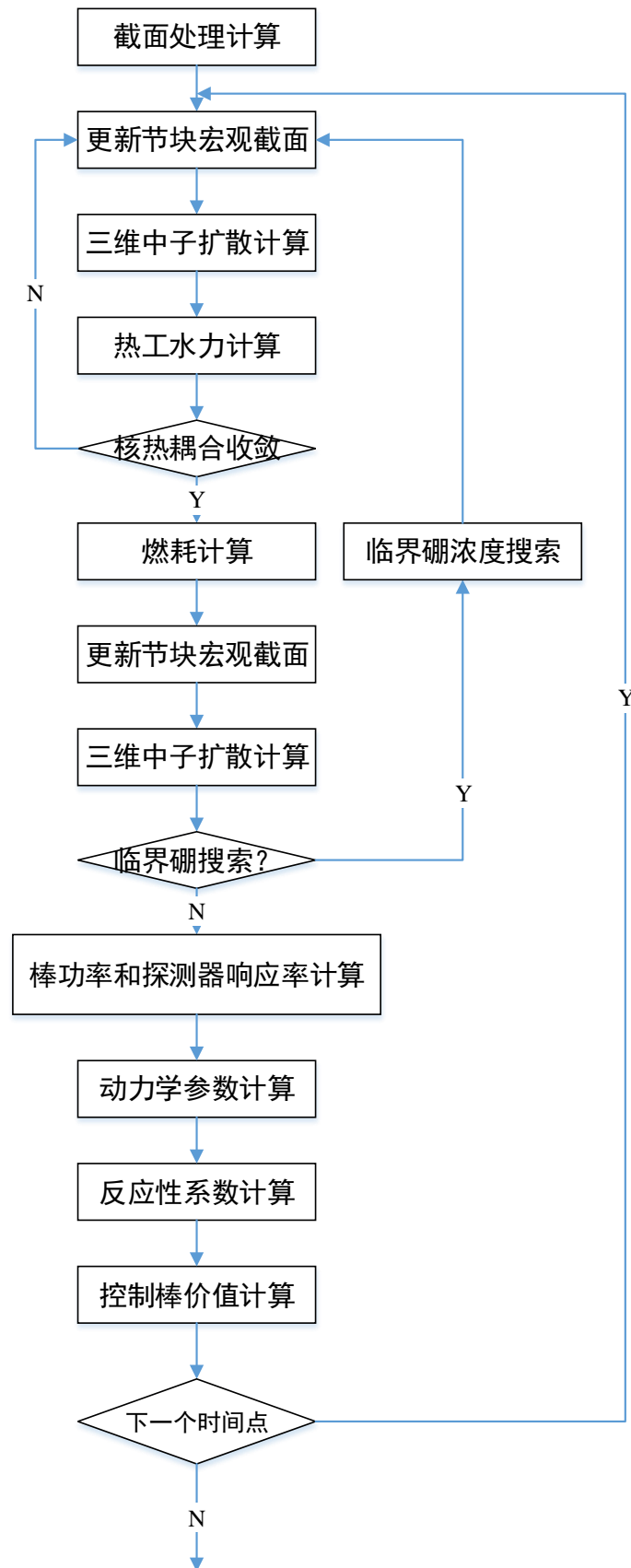


图 2-1 Bamboo-Core 程序的流程图

### 3. 群常数接口处理

根据组件计算给出的群常数-状态参数的离散关系，利用最小二乘拟合方法进行函数化和回代获得堆芯计算所需的、某一特定工况下群常数，称为群常数处理接口。

#### 3.1. 最小二乘拟合方法

对于给定离散点的对应关系：

$$y_n = x_n$$

若假设其函数近似展开关系为：

$$f_{xl} = \sum_{i=1}^m r_i(\mathbf{x}) \cdot a_i \quad (3-1)$$

其中  $r_i(\mathbf{x})$  为基函数， $a_i$  为展开系数。

最小二乘方法<sup>[2]</sup>的核心思想，就是通过求解使问题：

$$\xi(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=1}^m a_k r_k(\mathbf{x}_i) - y_i \right]^2$$

有最小值的展开系数的  $a_i$ ，获得能够使所有离散点上偏差的平方和达到最小的近似函数关系。事实上，该优化问题的解即是超定方程组：

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{x}_1) & \dots & r_m(\mathbf{x}_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_1(\mathbf{x}_n) & \dots & r_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

的最小二乘解；在方程两端同时乘以转置后的矩阵，得到方程组：

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{R}^T \mathbf{y} \quad (3-3)$$

此时，超定方程组转化为正定方程组，可通过多种数值方法求解。

根据该原理，选择多项式作为基函数，实现最小二乘法。方程的求解采用高斯-赛德尔迭代法，迭代收敛准则为两次迭代数值解之差的二范数满足用户给定的精度要求，或迭代次数超过用户给定的最大迭代次数。

为进一步提高计算精度，求解方程组式 (3-3) 时采用了两个降低偏差技术：



第一，自变量的变量替换，也就是上文提到的自变量归一化。状态参数数量级偏离 E+00 较远时，由于多项式函数中高次项的出现，导致方程组系数矩阵中元素之间量级相差悬殊，严重影响计算精度。因此需要通过变量替换将变量取值尽量变换到 1 附近，避免系数矩阵中高次项元素与低次项元素之间量级悬殊的情况出现，以防大数吃小数等现象影响数值计算结果。程序中对自变量进行归一化处理的具体表达式为：

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - x_{av}}{STD_{x_i}} \quad (3-4)$$

其中  $x_{av}$  为该自变量所有给出点上取值的平均：

$$x_{av} = \frac{\sum_{k=1}^n x_{i,n}}{n}$$

$STD_{x_i}$  为该自变量在已知点上的标准差：

$$STD_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{av})^2}$$

第二，因变量的变量替换。最小二乘法需要求解的目标方程组右端，需将因变量与自变量相乘。若因变量在各离散状态点上的取值相差悬殊，也会引起数值计算结果不准。因此，对因变量（即群常数分项） $y_i$  做以下处理：

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{y_{av}} \quad (3-5)$$

其中， $y_{av}$  表示该群常数所有已知点的平均值：

$$y_{av} = \frac{\sum_{k=1}^n y_{i,n}}{n}$$

### 3.2. 组合方式

本程序推荐采用压水堆常用的组合方式<sup>[3]</sup>：

$$\begin{aligned} \Sigma = & f_{base}(BU, CB) \cdot f_{cr}( \sqrt{TF} ) + f_{cr}(TM, CB) \\ & + \delta(CR) \cdot ( f_{cr}(BU, CB) \cdot f( \sqrt{TF} ) + f_{cr}(TM, CB) ) \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中，损耗深度 BU 取 4 阶拟合，可溶硼浓度 CB、功率密度 PR、慢化剂相对密度 UR 均取 3 阶拟合。 $\delta(CR)$  用来考虑控制棒对截面的影响。

需要通过拟合获得的群常数如下：

$\Sigma_t^g, g = 1, \dots, G$	-----	宏观总截面（不包括毒物的影响）
$\Sigma_a^g, g = 1, \dots, G$	-----	宏观吸收截面（不包括毒物的影响）
$\Sigma_s^{g-g} \dots, \Sigma_s^{g-g'}, \dots, \Sigma_s^{g-G}, g = 1, \dots, G$	-----	宏观散射矩阵
$\Sigma_f^g, g = 1, \dots, G$	-----	宏观裂变截面
$\nu\Sigma_f^g, g = 1, \dots, G$	-----	宏观中子产生截面
$\kappa\Sigma_f^g, g = 1, \dots, G$	-----	宏观中子能量产生截面
$\chi^g, g = 1, \dots, G$	-----	宏观中子裂变谱
$\gamma_I, \gamma_{Xe}, \gamma_{Pm}, \gamma_{Sm}$	-----	毒物及其先驱核的裂变产额
$\sigma_a^I(I-135), \sigma_a^{Xe}, \sigma_a^{Pm}, \sigma_a^{Sm}$	-----	考虑毒物及其先驱核的微观吸收截面

### 3.3. 毒物对宏观截面的影响

$$\Sigma_t^g = \Sigma_t'^g + \sum_{i=1}^{NP} \sigma_a^i N_a^i \quad (3-7)$$

$$\Sigma_a^g = \Sigma_a'^g + \sum_{i=1}^{NP} \sigma_a^i N_a^i \quad (3-8)$$

其中： $\Sigma_t'^g$  表示不包含毒物影响的宏观总截面；

$\Sigma_t^g$  表示包含毒物影响的宏观总截面；

$\Sigma_a'^g$  表示不包含毒物影响的宏观吸收截面；

$\Sigma_a^g$  表示包含毒物影响的宏观吸收截面；

$NP$  表示考虑的毒物种类个数；

$N_a^i$  表示第  $i$  种毒物当前的核子密度；

## 4. 变分节块扩散计算

变分节块法 (Variational Nodal Method) 是核反应堆堆芯中子学计算中最成功的节块法之一, 最早由美国西北大学 (Northwestern University, NU) 的 E. E. Lewis 教授提出<sup>[4]</sup>。变分节块法从二阶偶对称形式的中子输运方程<sup>[5]</sup>出发, 利用 Galerkin 变分技术在求解域上建立一个包含节块中子平衡方程的泛函<sup>[6]</sup>, 并利用 Lagrange 乘子法将边界条件包含在该泛函内<sup>[7]</sup>, 再通过 Ritz 法以空间上的正交多项式函数和角度上的球谐函数为基函数将这个泛函进行展开<sup>[8]</sup>, 从而获得耦合了节块体内的中子通量密度与节块边界上的分中子流密度的节块响应矩阵。与基于横向积分的节块方法相比, 变分节块法具有诸多优势:

(1) 基于横向积分的节块方法只能提供节块平均的中子通量密度, 必须采用精细功率重构技术才能获得节块内的精细中子通量密度分布, 而变分节块法只需将最终求解获得的中子通量密度代入相应的展开式即可;

(2) 基于横向积分的节块方法一般在进行理论推导的时候就已经将展开阶数固定, 而变分节块法中的展开阶数在理论推导过程中是完全任意的;

(3) 基于横向积分的节块方法中, 离散中子输运方程的共轭方程和共轭中子输运方程的离散方程是不等价的, 但在变分节块法中, 这二者完全等价<sup>[9]</sup>;

(4) 基于横向积分的节块方法一般要求节块内的材料是均匀的, 而变分节块法在节块内部可进一步采用同样是基于变分原理的有限元方法来处理非均匀节块<sup>[10]</sup>, 从而可以进行燃料与慢化剂未打混的堆芯计算;

(5) 当角度变量的展开需要高阶近似时, 变分节块法可以在节块内部和边界上采用兼容的高阶球谐函数展开<sup>[11]</sup>, 而那些试图将横向积分技术从扩散计算移植到输运计算中的其他输运节块方法在节块内部和节块边界上采用的角度近似一般不兼容, 而且除扩散近似外一般只允许某个固定阶数的角度近似。

### 4.1. 中子扩散方程的变分原理和 Ritz 离散

第  $g$  群三维中子扩散方程可写为:

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \Phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{t,g} \Phi_g(\mathbf{r}) = \Sigma_{s,g} \Phi_g(\mathbf{r}) + S_g \quad (4-1)$$

其中,  $\Phi_g(\mathbf{r})$  表示中子标通量密度 ( $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ );  $D_g$ 、 $\Sigma_{t,g}$  和  $\Sigma_{s,g}$  分别表示中子扩散系数 ( $\text{cm}$ ), 中子宏观总截面 ( $\text{cm}^{-1}$ ) 和群内宏观散射截面 ( $\text{cm}^{-1}$ );  $S_g$  表示中子源项 ( $\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$ ), 包括散射源项和裂变源项:

$$S_g = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{gg'}^s \Phi_{g'}(\mathbf{r}) + \sum_g \frac{\chi_g}{k} \nu \Sigma_{f,g} \Phi_g(\mathbf{r}) \quad (4-2)$$

根据 Galerkin 变分<sup>[12]</sup>, 对中子扩散方程可以在由若干节块组成的整个求解域及其边界上建立全局泛函  $F$ ,

$$F[\Phi, \chi] = \sum_v F_v[\Phi, \chi] \quad (4-3)$$

其中, 节块  $v$  的贡献为

$$F_v[\Phi, \chi] = \int_v dV \{ D(\nabla \Phi)^2 + (\Sigma_t - \Sigma_s) \Phi^2 - 2\Phi S \} + 2 \int_{\gamma} \Phi \chi_{\gamma} d\Gamma \quad (4-4)$$

$$\chi_{\gamma} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{\gamma} \quad (4-5)$$

$$\mathbf{J} = -D \nabla \Phi \quad (4-6)$$

其中,  $\mathbf{n}_{\gamma}$  为边界  $\gamma$  的外法线方向向量,  $\chi_{\gamma}$  表示节块边界上沿外法线方向的净中子流密度 ( $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ )。

节块内泛函表达式中, 第二项用净中子流密度作为节块边界上的 Lagrange 乘子, 既可以保证每个节块内的中子守恒关系, 又便于节块边界上连续条件的处理。

将节块内中子标通量密度, 中子源项和节块边界上的净中子流密度分别进行如下展开:

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i f_i(\mathbf{r}) \\ \chi_{\gamma}(\mathbf{r}) = \sum_j \chi_{j\gamma} h_{j\gamma}(\mathbf{r}) \\ S(\mathbf{r}) = \sum_i s_i f_i(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (4-7)$$

其中, 空间基函数为完全的正交多项式, 见下方:

$$\begin{cases} \int_v f_i(\mathbf{r}) \cdot f_j(\mathbf{r}) dV = \delta_{ij} \\ \int_{\gamma} h_i(\mathbf{r}) \cdot h_j(\mathbf{r}) d\Gamma = \delta_{ij} \end{cases} \quad (4-8)$$

于是, 中子标通量密度和源项的展开式系数之间满足以下关系式:

$$s_{i,g} = \sum_{g \neq g'} \Sigma_{gg'}^s \phi_{i,g'} + \sum_{g'} \frac{\chi_g}{k} \nu \Sigma_{f,g} \phi_{i,g} \quad (4-9)$$

将式 (4-7) 代入式 (4-4), 可得:

$$F_v[\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\chi}] = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\phi} - 2\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{s} + 2\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\chi}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{M}_\gamma \quad \cdots] \quad (4-11)$$

$$\boldsymbol{\chi}^T = [\chi_1^T \quad \chi_2^T \quad \cdots \quad \chi_\gamma^T \quad \cdots] \quad (4-12)$$

向量  $\boldsymbol{\phi}^T$ ,  $\boldsymbol{\chi}_\gamma$  和  $\mathbf{s}$  分别由中子标通量密度, 中子净流密度和中子源项展开式系数  $\phi_i$ 、 $\chi_i$  和  $s_i$  组成; 各矩阵与向量的对应元素分别为

$$A_{ij} = \frac{1}{3\Sigma_t} P_{ij} + V_v \delta_{ij} (\Sigma_t - \Sigma_s) \quad (4-13)$$

$$P_{ij} = \int_V \nabla f_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla f_j(\mathbf{r}) dV \quad (4-14)$$

$$M_{ij\gamma} = \int_\gamma f_i(\mathbf{r}) \cdot h_j(\mathbf{r}) d\Gamma \quad (4-15)$$

令式 (4-10) 中的泛函关于  $\boldsymbol{\phi}^T$  的变分为 0, 可得:

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\chi} \quad (4-16)$$

令式 (4-10) 中的泛函关于  $\boldsymbol{\chi}_\gamma$  的变分为 0, 可得

$$\boldsymbol{\Psi}_\gamma = \mathbf{M}_\gamma^T \boldsymbol{\phi} \quad (4-17)$$

在边界处连续。将式 (4-16) 代入式 (4-17), 可得:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} \boldsymbol{\chi} \quad (4-18)$$

为了将响应矩阵表达成通用形式, 定义边界上的分中子流密度

$$\mathbf{j}^\pm = \frac{1}{4} \boldsymbol{\Psi} \pm \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi} \quad (4-19)$$

即

$$\boldsymbol{\Psi} = 2(\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \quad (4-20)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{j}^+ - \mathbf{j}^- \quad (4-21)$$

将式 (4-20) 和式 (4-21) 代入式 (4-18), 可得:

$$\mathbf{j}^+ = \mathbf{B} \mathbf{s} + \mathbf{R} \mathbf{j}^- \quad (4-22)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{G} + \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{C}^T \quad (4-23)$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{G} + \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G} - \mathbf{I}] \quad (4-24)$$

$$\mathbf{G}_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{\gamma}^{\top} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_{\gamma'} \quad (4-25)$$

$$\mathbf{C}_{\gamma}^{\top} = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{\gamma}^{\top} \mathbf{A}^{-1} \quad (4-26)$$

$\mathbf{I}$  为相应的单位矩阵。

将式 (4-20) 和式 (4-21) 代入式 (4-16), 可得:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{C}(\mathbf{j}^+ - \mathbf{j}^-) \quad (4-27)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1} \quad (4-28)$$

式 (4-9), 式 (4-22) 和式 (4-27) 即为离散后的中子扩散方程。式 (4-9) 表示节块内中子标通量密度和中子源项之间的关系; 式 (4-22) 表示节块边界处入射净中子流密度和出射净中子流密度之间的关系; 式 (4-27) 表示节块内中子标通量密度和边界分中子流密度之间的关系。

## 4.2. 算子形式的变分节块方法

根据上一小节的推导, 变分节块法中的节块响应关系包括:

$$\mathbf{s}_g = \sum_{g \neq g'} \Sigma_{gg'}^s \boldsymbol{\varphi}_{g'} + \sum_g \frac{\chi_g}{k} \nu \Sigma_{f,g} \boldsymbol{\varphi}_g \quad (4-29)$$

$$(\mathbf{I}_j - \mathbf{R}_g \mathbf{\Pi}) \mathbf{j}_g = \mathbf{B}_g \mathbf{s}_g \quad (4-30)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_g = \mathbf{H}_g \mathbf{s}_g - \mathbf{C}_g (\mathbf{I}_j - \mathbf{\Pi}) \mathbf{j}_g \quad (4-31)$$

式中:

$\mathbf{j}_g$  —— 节块的出射中子流密度向量 (省去了上标“+”) /  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ;

$\mathbf{B}_g$ ,  $\mathbf{C}_g$ ,  $\mathbf{H}_g$  和  $\mathbf{R}_g$  —— 由几何与材料共同决定的响应矩阵;

$\mathbf{I}_j$  —— 大小与分中子流密度向量相对应的单位矩阵;

$\mathbf{\Pi}$  —— 节块分中子流密度之间的联系矩阵, 包含了内部边界上相邻节块间的互为出入射关系和外边界上的边界条件。

将源项式 (4-29) 代入式 (4-30) 和式 (4-31), 并将所有的能群合并, 可得算子形式的变分节块法

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_j - \mathbf{R}\mathbf{\Pi} & \mathbf{B}\Sigma^s \\ \mathbf{C}(\mathbf{I}_j - \mathbf{\Pi}) & \mathbf{I}_\varphi - \mathbf{H}\Sigma^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (4-32)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{k} \mathbf{F} \boldsymbol{\varphi} \quad (4-33)$$

$$\mathbf{F}_{gg'} = \chi_g \nu \Sigma_{f,g'} \quad (4-34)$$

式中，右端项为裂变源，上半部分为裂变源对节块边界分中子流密度形成的源项，下半部分是裂变源对节块体内部中子通量密度形成的源项。左端的系数矩阵可以分为四块：左上角的  $\mathbf{I}_j - \mathbf{R}\mathbf{\Pi}$ ，是按照能群的分块对角阵，表示群内的中子在空间上的耦合关系；右下角的  $\mathbf{I}_\varphi - \mathbf{H}\Sigma^s$ ，是按照空间节块的分块对角阵，表示节块内的中子在能群上的耦合关系；其余两块分别为空间和能群的相互贡献项。

式(4-32)中，代表空间耦合关系的系数矩阵  $\mathbf{I}_j - \mathbf{R}\mathbf{\Pi}$  显式出现在多群系统的系数矩阵中，表示对空间耦合关系的显式考虑，即无需单独对该矩阵求逆。

在式(4-32)中用代入法消去分中子流  $\mathbf{j}$ ，可得：

$$(\mathbf{I}_\varphi - \mathbf{T}\Sigma^s) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T}\mathbf{f} \quad (4-35)$$

其中，按能群分块对角的空传输矩阵  $\mathbf{T}$  为

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} - \mathbf{C}(\mathbf{I}_j - \mathbf{\Pi})(\mathbf{I}_j - \mathbf{R}\mathbf{\Pi})^{-1} \mathbf{B} \quad (4-36)$$

式(4-36)中，代表空间耦合关系的系数矩阵  $\mathbf{I}_j - \mathbf{R}\mathbf{\Pi}$  以逆矩阵的形式出现在空传输矩阵  $\mathbf{T}$  中，表示对空间耦合关系的隐式考虑<sup>[12]</sup>。

### 4.3. 迭代计算过程

一般地，含特征值的裂变源问题采用幂法<sup>[13]</sup>迭代求解，称之为裂变源迭代（FS），其目标是求得特征值问题的基态特征值和特征函数，即绝对值最大的特征值  $k_0$  及其对应的特征函数。在幂法中，谐波的衰减指数为其特征值与基阶特征值的比值，衰减最慢的是绝对值仅次于  $k_0$  的  $k_1$  所对应的特征函数，称为一阶谐波，其衰减指数决定了裂变源迭代的收敛速度，定义为占优比

$$d = \frac{k_1}{k_0} \quad (4-37)$$

占优比越接近 1，一阶谐波就越难分离出去，也就越不容易将基阶谐波从所有谐波的混合中提炼出来，裂变源迭代的收敛速度也就越慢。

在每次裂变源迭代中，需在已知裂变源  $f$  的情况下，迭代求解多群系统式 (4-32) 或 (4-35)，称为多群迭代 (MG)。传统的方法为多群 Gauss-Seidel 算法，简称为 GS。将散射矩阵分为下散射矩阵 (Down Scattering) 和上散射矩阵 (Up Scattering)

$$\Sigma = \Sigma_D + \Sigma_U \quad (4-38)$$

然后对散射矩阵应用 Gauss-Seidel 迭代格式，可得

$$\varphi^{(m)} = T(\Sigma_D \varphi^{(m)} + \Sigma_U \varphi^{(m-1)} + f) \quad (4-39)$$

式中：

$m$  —— 多群迭代次数。

将式 (4-39) 稍作变形，可得

$$\varphi^{(m)} = (\mathbf{I}_\varphi - T\Sigma_D)^{-1} T(\Sigma_U \varphi^{(m-1)} + f) \quad (4-40)$$

其中，矩阵  $\mathbf{I}_\varphi - T\Sigma_D$  为分块下三角阵，只需一次 Gauss-Seidel 扫描即可完成对其求逆。

因此，当没有上散射即  $\Sigma_U = 0$  时，只需一次迭代，便可获得真解。而对于反应堆堆芯中子学问题，一般只在热群有少量的上散射，大约需要 5~10 次的多群 Gauss-Seidel 迭代。

在计算空间传输矩阵  $T$  的矩阵向量积的过程中，由 (4-36) 可以看出，需要对矩阵  $\mathbf{I}_j - R_g \Pi$  进行迭代求逆，称为群内迭代 (WG)，即在右端源项已知的情况下

$$\mathbf{q}_g = \mathbf{B}_g \mathbf{s}_g \quad (4-41)$$

依次在每个能群内求解如下群内方程：

$$(\mathbf{I}_j - \mathbf{R}_g \Pi) \mathbf{j}_g = \mathbf{q}_g \quad (4-42)$$

根据上述介绍可知，变分节块法的数值计算过程包含三重迭代：裂变源迭代，多群迭代和群内迭代。其中，裂变源迭代和多群迭代过程的伪代码如下：

$$k_{(0)} = 1.0, \quad \varphi_{(0)} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{j}_{(0)} = \mathbf{0}; \quad \hat{\mathbf{f}}_{(0)} = \mathbf{F}\varphi_{(0)};$$

FS: Do  $n=1, \dots, N_{max}$

$$(\mathbf{I}_\varphi - T\Sigma)\varphi = (1/k)\mathbf{TF}\varphi$$

MG: Do  $m=1, \dots, M_{max}$

$$(\mathbf{I}_\varphi - T\Sigma)\varphi_{(n)} = \mathbf{Tf}_{(n)}$$

$$\varphi_{(n)}^{(m)} = (\mathbf{I}_\varphi - T\Sigma_D)^{-1} T(\Sigma_U \varphi_{(n)}^{(m-1)} + f), \quad \varphi_{(n)}^{(0)} = \varphi_{(n-1)}$$

$$r^{(m)} = \|\varphi_{(n)}^{(m)} - \varphi_{(n)}^{(m-1)}\|_2$$



If  $\Sigma_U = 0$  or  $r^{(1)} < \varepsilon_{MG}$ , EXIT  
 If  $\frac{r^{(m)}}{r^{(1)}} < e_{MG}$ , EXIT  
 End MG  
 $M_{\max} = m$   
 $\hat{\mathbf{f}}_{(n)} = \mathbf{F}\boldsymbol{\varphi}_{(n)}$ ,  $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(n)} = \hat{\mathbf{f}}_{(n)} - \hat{\mathbf{f}}_{(n-1)}$   
 $k_{(n)} = k_{(n-1)} \frac{\|\hat{\mathbf{f}}_{(n)}\|_2}{\|\hat{\mathbf{f}}_{(n-1)}\|_2}$ ,  $d_{(n)} = \frac{\|\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(n)}\|_2}{\|\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(n-1)}\|_2}$   
 If  $\left| \frac{k_{(n)} - k_{(n-1)}}{k_{(n)}} \right| \leq e_k$ ,  $\frac{\|\Delta\hat{\mathbf{f}}_{(n)}\|_2}{\|\hat{\mathbf{f}}_{(n-1)}\|_2} < e_f$  且  $\frac{\|\boldsymbol{\varphi}_{(n)} - \boldsymbol{\varphi}_{(n-1)}\|_2}{\|\hat{\mathbf{f}}_{(n)}\|_2} < e_{phi}$ , EXIT  
 End FS

群内迭代过程，包含在矩阵  $\mathbf{T}$  矩阵向量积的计算过程中，其伪代码如下：

EG (Energy Group): Do  $g=1, \dots, G$   
 $\mathbf{s}_g = \Sigma_D \boldsymbol{\varphi}^{New} + \Sigma_U \boldsymbol{\varphi}^{Old} + \mathbf{f}'_g$ ,  $\mathbf{q}_g = \mathbf{B}_g \mathbf{s}_g$   
 WG: Do  $i=1, \dots, I_g^{\max}$   $\mathbf{j}_g = (\mathbf{I}_j - \mathbf{R}_g \boldsymbol{\Pi})^{-1} \mathbf{q}_g$   
 $\mathbf{j}_g^{(i)} = \mathbf{R}_g \boldsymbol{\Pi} \mathbf{j}_g^{(i-1)} + \mathbf{q}_g$   
 $\gamma_g^{(i)} = \|\mathbf{j}_g^{(i)} - \mathbf{j}_g^{(i-1)}\|_2$   
 If  $\gamma_g^{(1)} < \varepsilon_{WG,g}$ , EXIT  
 If  $\frac{\gamma_g^{(i)}}{\gamma_g^{(1)}} \leq e_{WG,g}$ ,  $I_g^{active} = i$ , EXIT  
 End WG  
 $\boldsymbol{\varphi}_g^{New} = \mathbf{H}_g \mathbf{s}_g - \mathbf{C}_g (\mathbf{I}_j - \boldsymbol{\Pi}) \mathbf{j}_g^{(I_g^{active})}$   
 End EG

对于裂变源迭代，除了最大迭代次数  $N_{max}$  以外，有三个相对误差限，分别为增殖因子的相对误差限  $e_k$ 、裂变源分布的相对误差限  $e_f$  和多群中子通量密度分布的相对误差限  $e_{phi}$ 。对于多群迭代，有最大迭代次数  $M_{max}$ 、中子通量密度分布的相对误差限  $e_{MG}$  和绝对误差限  $\varepsilon_{MG}$ 。对于群内迭代，有最大迭代次数  $I_g^{\max}$  和分中子流密度的相对误差限  $e_{WG,g}$  和绝对误差限  $\varepsilon_{WG,g}$ 。另外，上述伪代码中  $N_{active}$ ， $M_{active}$ ，和  $I_g^{active}$  分别表示裂变源迭代、多群迭代和群内迭代的实际迭代次数。裂变源迭代中，问题的占优比通过下式进行估计：

$$d_{(n)} = \frac{\|\Delta \hat{f}_{(n)}\|_2}{\|\Delta \hat{f}_{(n-1)}\|_2} \quad (4-43)$$

## 4.4. 加速方法

为提高程序的计算效率，在程序中使用了两种加速方法：Lyusternik-Wagner 外推加速收敛技术<sup>[14]</sup>和多重迭代优化技术<sup>[12]</sup>。

### 4.4.1 Lyusternik-Wagner 外推加速收敛技术

在第  $n$  次有效增殖因子迭代结束后，最大的节块平均中子通量密度相对误差为：

$$\varepsilon^{(n)} = \max_{\substack{1 \leq g \leq G \\ 1 \leq l \leq L}} \left| 1 - \frac{\bar{\phi}_{g,l}^{(n-1)}}{\bar{\phi}_{g,l}^{(n)}} \right| \quad (4-44)$$

式中的  $g$  和  $l$  分别表示能群和节块编号， $n$  表示裂变源迭代次数。

在 Lyusternik-Wagner 外推加速收敛技术中，定义下列参量：

$$\sigma^{(n)} = \frac{\varepsilon^{(n)}}{\varepsilon^{(n-1)}} \quad (4-45)$$

$$\delta^{(n)} = \left| 1 - \frac{\sigma^{(n)}}{\sigma^{(n-1)}} \right| \quad (4-46)$$

$$\delta_m^{(n)} = \max \left( \delta^{(n)}, \delta^{(n-1)} \right) \quad (4-47)$$

当这些变量满足以下条件时，认为中子通量密度的误差呈渐进收敛趋势，可以对中子通量密度矩和中子流密度矩进行外推，从而达到加速效果：

$$\begin{aligned} n &\geq 5 \\ \sigma^{(n)} &< 1, \sigma^{(n-1)} < 1 \\ \delta_m^{(n)} &< 0.5 \end{aligned} \quad (4-48)$$

定义外推因子  $\rho^{(n)}$  为：

$$\rho^{(n)} = \min \left( 50, \frac{\sigma^{(n)}}{1 - \sigma^{(n)}} \right) \quad (4-49)$$

再利用上式获得的外推因子对第  $n$  次有效增殖因子迭代所得所有能群所有节块的的中子通量密度矩和表面出射中子流密度矩加以外推：

$$\phi_{g,l,i}^{(n)} = \phi_{g,l,i}^{(n-1)} + \rho^{(n)} \left( \phi_{g,l,i}^{(n)} - \phi_{g,l,i}^{(n-1)} \right), \quad l=1, \dots, L; i=1, \dots, I \quad (4-50)$$

$$j_{g,l,s,i}^{+, (n)} = j_{g,l,s,i}^{+, (n-1)} + \rho^{(n)} \left( j_{g,l,s,i}^{+, (n)} - j_{g,l,s,i}^{+, (n-1)} \right), \quad l=1, \dots, L; i=1, \dots, I' \quad (4-51)$$

式中,  $i$  表示展开矩,  $s$  表示节块各个表面编号。

#### 4.4.2 多重迭代优化技术

对于裂变源迭代, 由于是最外层迭代, 其收敛准则不需要优化, 直接由用户输入。所有的优化都在每一次迭代的刚开始进行, 以保证本次迭代计算使用的是目前能获得的最优收敛准则。

##### 1. 多群迭代优化

对于两重迭代, 每次外迭代的误差衰减幅度越大, 相应的内迭代需要收敛得越严格。如果每一次裂变源迭代中的多群迭代都收敛得足够严格, 稳定迭代过程中的每一次裂变源迭代可将迭代偏差缩减  $d$  ( $0 < d < 1$ ) 倍, 其中  $d$  为问题的占优比, 即次阶特征值与主特征值的比值的绝对值。一方面, 多群迭代的相对误差限与裂变源问题的占优比有关。经过一系列的测试发现: 最优的多群迭代相对误差限基本处在区间  $[0.008d, 0.04d]$  内。另一方面, 将多群迭代相对误差限放宽, 降低了每次裂变源迭代中多群迭代的收敛度, 会使得裂变源迭代的误差衰减幅度减小, 从而使对问题占优比的估计偏大。

第  $n$  次裂变源迭代中对占优比的估计为:

$$d_n = \frac{\|F\phi_{(n)} - F\phi_{(n-1)}\|_2}{\|F\phi_{(n-1)} - F\phi_{(n-2)}\|_2} \quad (4-52)$$

一般经过 3~5 次裂变源迭代之后, 该估计值将趋于真实的占优比, 并保持稳定。由于多群迭代相对误差限的调整需要依据合理的占优比估计, 因此对于前 4 次裂变源迭代, 采用固定的多群迭代相对误差限。考虑到其最优值的范围为  $(0.008 \sim 0.04)d$ , 前四次裂变源迭代中的多群迭代相对误差限依次设为: 0.08、0.05、0.02 和 0.01。

对于之后的裂变源迭代, 为了避免占优比估计的振荡, 对最新的三次裂变源估计值进行平均:

$$\bar{d} = \frac{1}{n-n'} \sum_{l=n'}^{n-1} d_l \quad (4-53)$$

$$\delta_d = \frac{1}{\bar{d}} \sqrt{\frac{1}{n-n'} \sum_{l=n'}^{n-1} (d_l - \bar{d})^2} \quad (4-54)$$

$$n' = \max(n-3, 3) \quad (4-55)$$

其中，参数  $\delta_d$  为该三次估计值的相对均方根，参数  $n'$  的选取保证不取绝对意义上的前三次裂变源迭代中对占优比的估计值，避免其大幅度的振荡影响计算。基于对占优比估计的平均值及其相对均方根的取值，将占优比划分为高（比如  $\bar{d} > 0.35$ ）、低占优比，将该估计序列划分为稳定（ $\delta_d < 0.2$ ）和不稳定；然后依次对划分出的四种情况进行处理，处理的伪代码如图 4-1 所示。之后的多群迭代相对偏差，如果大于  $0.008\bar{d}$ ，将被强制设为  $0.008\bar{d}$ ；如果小于  $0.1\bar{d}$ ，将被强制设为  $0.1\bar{d}$ 。

```

IF  $\bar{d} > 0.35$ 
  IF  $\delta_d < 0.2$                                      ! 大  $d$ , 且稳定
    IF  $\bar{d} > 0.95$  &  $e_{MG} > 0.04\bar{d}$ 
       $e_{MG} := 0.04\bar{d}$                                ! 收紧 MG RET
    ELSE IF  $\bar{d} < 0.95$ 
       $e_{MG} := e_{MG}/0.8$                              ! 放松 MG RET
    END IF
  ELSE IF  $N_w \text{ .GE. } 3$                                ! 大  $d$ , 但不稳定
     $e_{MG} := 0.8e_{MG}$ 
  END IF
ELSE IF  $\delta_d < 0.2$                                    ! 小  $d$ , 且稳定
   $e_{MG} := e_{MG}/0.8$ 
END IF
 $e_{MG} := \min(\max(e_{MG}, 0.008\bar{d}), 0.1\bar{d})$ 

```

图 4-1 多群迭代相对误差限优化的伪代码

## 2. 群内迭代优化

对于多群迭代中的每个能群中的群内迭代，相对误差限和最大迭代次数均可进行优化。其中，相对误差限的调整依据是多群迭代中系数矩阵的谱半径：

$$\rho_{MG} = \frac{1}{M^{active} - 1} \sum_{m=2}^{M^{active}} \frac{r^{(m)}}{r^{(m-1)}} \quad (4-56)$$

其中， $M^{active}$  为上一次裂变源迭代中的多群迭代次数。考虑到初始迭代过程的不

稳定性，对于前 4 次裂变源迭代和每次裂变源迭代中的前 2 次多群迭代，相应群内迭代相对误差限选为 0.1；其余群内迭代的相对误差限直接选为  $\rho_{MG}$ 。

为了优化设置群内迭代最大迭代次数，需要评估每个能群的平均光学厚度：

$$\bar{\tau}_g = \frac{\sum_{node} \Sigma_{t,g,node} D_{node} V_{node}}{\sum_{node} V_{node}} \quad (4-57)$$

其中， $\Sigma_{t,g,node}$ 、 $D_{node}$  和  $V_{node}$  依次为节块 node 的宏观总截面 ( $\text{cm}^{-1}$ )、特征长度 ( $\text{cm}$ ) 和体积 ( $\text{cm}^3$ )。考虑到光厚能群需要较少的群内迭代，对于  $\bar{\tau}_g > 1$ ，选择  $I_g^{\max} = 1$ ；对于  $\bar{\tau}_g < 1$ ，相应的估算式如下：

$$I_g^{\max} = \min(\max(\text{int}(\frac{\log e_{WG}}{\log \bar{\rho}_{WG}}) + \left| \text{int}(\frac{\log e_{md}}{\log \bar{\rho}_{WG}}) \right|, 2), I'_{\max}) \quad (4-58)$$

其中， $e_{WG}$  为当前群的群内迭代相对误差限， $I'_{\max}$  为用户输入的最大群内迭代次数， $e_{md}$  和  $\bar{\rho}_{WG}$  分别为能群平均的误差衰减率修正因子和群内迭代系数矩阵的谱半径估计值：

$$e_{md} = \sqrt[G]{\prod_g e_{WG} \frac{\gamma_g^{(1,1)}}{\gamma_g^{(1,I_g^{\max})}}} \quad (4-59)$$

$$\bar{\rho}_{WG} = \sqrt[G]{\prod_g \rho_g} \quad (4-60)$$

其中， $I_g^{\text{active}}$  和  $\rho_g$  依次为上一次多群迭代中的第  $g$  群的实际群内迭代次数和谱半径：

$$\rho_g = \begin{cases} \min(\max(\frac{1}{I_g^{\text{active}} - 1} \sum_{i=2}^{I_g^{\text{active}}} \frac{\gamma_g^{(1,i)}}{\gamma_g^{(1,i-1)}}, 0.5), 0.99) & I_g^{\text{active}} \geq 2 \\ e_{WG} & I_g^{\text{active}} = 1 \end{cases} \quad (4-61)$$

## 5. 功率与临界计算

### 5.1. 堆芯功率计算

#### 5.1.1 归一化因子

堆芯功率和中子通量密度分布均按照平均功率进行归一：

$$P_{av} = \frac{1}{V_{core}} \sum_{l=1}^L \sum_{g=1}^G k\Sigma_{f,l}^g \phi_l^g V_l \quad (5-1)$$

其中： $V_l$ 为第 $l$ 个节块的体积；

$V_{core}$ 为堆芯的总裂变体积；

$P_{av}$ 为堆芯的归一化因子。

#### 5.1.2 相对中子通量密度和相对功率密度

各区的相对功率密度按下式计算：

$$\tilde{P}_l = \frac{\sum_{g=1}^G k\Sigma_{f,l}^g \phi_l^g}{P_{av}} \quad (5-2)$$

各区的相对中子通量密度按下式计算：

$$\tilde{\phi}_l^g = \phi_l^g / P_{av} \quad (5-3)$$

#### 5.1.3 绝对中子通量密度和绝对功率密度

各区的绝对功率密度按下式计算：

$$C_p = \frac{P_{th} \cdot (10^6)}{V_{core}} \quad (5-4)$$

$$\hat{P}_l = \tilde{P}_l \cdot C_p \quad (5-5)$$

其中： $C_p$ 为相对功率密度到绝对功率密度的转化因子。

各区的绝对中子通量密度按下式计算<sup>[15]</sup>：

$$C_{\phi} = \frac{P_{th} \cdot (10^6) \cdot k_{eff} \cdot (10^{-24})}{V_{core}} \quad (5-6)$$

$$\hat{\phi}_l^g = \tilde{\phi}_l^g C_{\phi} \quad (5-7)$$

其中： $C_{\phi}$  为相对中子通量密度到绝对中子通量密度的转化因子。

## 5.2. 临界硼浓度搜索

### 5.2.1 硼浓度调节

若设  $CB^{n-1}$  为当前堆芯可溶硼浓度， $CB^n$  为调整后的可溶硼浓度，则：

$$\begin{aligned} CB^1 &= CB^0 - \frac{k^0 - k_{\lambda}}{k_{\lambda} \cdot Guess} \\ CB^n &= CB^{n-1} + \frac{k_{\lambda} - k^{n-1}}{k^1 - k^{n-1}} (CB^1 - CB^{n-1}), n > 1 \end{aligned} \quad (5-8)$$

可取  $Guess = -1.2D-4$ 。

### 5.2.2 松弛因子的应用

松弛因子可用来减缓硼浓度搜索时硼浓度的振荡，用于以下方程：

$$CB^n = \omega \cdot CB^{n-1} + (1 - \omega) \cdot CB^{n-2}, n \geq 4 \quad (5-9)$$

当  $\omega=0.5$  时，则下次硼浓度值等于本次硼浓度值和上次硼浓度值平均，当硼浓度值单调收敛时，程序将自动旁通以上方程。

## 6. 燃耗计算

### 6.1. 堆芯内某处的燃耗深度

$$BU_i^{k+1} = \frac{\hat{P}_i^k}{\rho_i} \cdot \Delta t^k + BU_i^k \quad (6-1)$$

式中， $BU_i^k$  表示空间  $i$  处在第  $k$  步时间点上的燃耗深度，MW·D/tU

$P_i^k$  表示空间  $i$  处在第  $k$  步时间点上功率，MW；

$\Delta t^k$  表示第  $k$  步燃耗段的时间步长，D；

$\rho_i$  表示空间  $i$  处的对应于初始铀装载量，t。

### 6.2. 毒物的核子密度

毒物  $^{135}\text{Xe}$  与其先驱核  $^{135}\text{I}$  的燃耗方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{dN_{Xe}}{dt} &= Y_{Xe} - A_{Xe}N_{Xe} + \lambda_I N_I \\ \frac{dN_I}{dt} &= Y_I - A_I N_I \end{aligned} \quad (6-2)$$

消失率系数： $A_n = \lambda_n + \sum_{g=1}^G \sigma_a^{n,g} \hat{\phi}^g$

裂变率： $Y_n = y_n \sum_{g=1}^G \Sigma_f^g \hat{\phi}^g$

其中： $N_n$  为相应的核子密度，单位为  $10^{24}/\text{cm}^3$ ；

$\lambda_n$  为衰变常数，单位为  $\text{s}^{-1}$ ；

$\hat{\phi}^g$  为第  $g$  群的中子通量密度，单位为  $\text{s}^{-1}\text{cm}^{-2}$ ；

$\sigma_a^{n,g}$  为第  $g$  群相应的微观吸收截面，单位为 Ba；

$\Sigma_f^g$  为第  $g$  群宏观裂变截面，单位为  $\text{cm}^{-1}$ ；



如果初始浓度为  $N_n(0)$ ，那么  $t$  时刻的浓度  $N_n(t)$  为：

$$\begin{cases} N_I(t) = N_I(0)e^{(-A_I t)} + \frac{Y_I}{A_I}(1 - e^{(-A_I t)}) \\ N_{Xe}(t) = N_{Xe}(0)e^{(-A_{Xe} t)} + \left( \frac{Y_{Xe}}{A_{Xe}} + \frac{\lambda_I Y_I}{A_I A_{Xe}} \right) (1 - e^{(-A_{Xe} t)}) \\ \quad + \left( \frac{\lambda_I N_I(0)}{A_{Xe} - A_I} - \frac{\lambda_I Y_I}{A_I (A_{Xe} - A_I)} \right) (e^{(-A_I t)} - e^{(-A_{Xe} t)}) \end{cases} \quad (6-3)$$

平衡浓度为：

$$\begin{cases} N_I(\infty) = \frac{Y_I}{A_I} \\ N_{Xe}(\infty) = \frac{Y_{Xe} + \lambda_I N_I}{A_{Xe}} = \frac{Y_{Xe}}{A_{Xe}} + \frac{\lambda_I Y_I}{A_I A_{Xe}} \end{cases} \quad (6-4)$$

毒物  $^{149}\text{Sm}$  及其先驱核  $^{149}\text{Pm}$  的情况同上；

## 7. 动力学参数计算

为完成压水堆的安全分析，需由稳态堆芯程序给出稳态堆芯的相应参数。具体有点堆参数、动力学参数和反应性反馈系数。

### 7.1. 点堆参数

#### 7.1.1 平均中子通量密度

以体积为权重，保证中子通量守恒，对中子通量密度求平均：

$$\phi = \frac{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \phi_l^g \right)}{\sum_{l=1}^L V_l} \quad (7-1)$$

#### 7.1.2 平均中子速度

以通量为权重，保证中子个数守恒，对中子速的倒数求平均：

故，由

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \frac{\phi_l^g}{v_l^g} \right)}{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \phi_l^g \right)} \quad (7-2)$$

得

$$\bar{v} = \frac{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \phi_l^g \right)}{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \frac{\phi_l^g}{v_l^g} \right)} \quad (7-3)$$

#### 7.1.3 平均宏观裂变截面和平均宏观吸收截面

以通量为权重，保证核反应率守恒，对截面求平均：

$$\bar{\Sigma} = \frac{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \Sigma_l^g \phi_l^g \right)}{\sum_{l=1}^L \left( V_l \sum_{g=1}^G \phi_l^g \right)} \quad (7-4)$$

#### 7.1.4 无限介质增值因数

以为计算无限介质增值因数  $K_{in}$  和有效增值因数  $K_{eff}$  的比值，需计算无限介质增值因数  $K_{in}$ 。 $K_{in}$  的计算是通过求解全对称边界条件下单区多群中子扩散方程完成的。

单区多群、全对称边界下的中子扩散方程如下：

$$\Sigma_{t,g}\phi_g - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}, \quad g = 1, G \quad (7-5)$$

经推导由上式可得：

$$k = \frac{\sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g}{\sum_{g=1}^G \Sigma_{a,g} \phi_g} \quad (7-6)$$

$$\phi_g = \frac{1}{\Sigma_{t,g}} \sum_{g'=1}^G \left( \frac{\chi_g}{k} \nu \Sigma_{f,g'} + \Sigma_{g' \rightarrow g} \right) \phi_{g'}, \quad g = 1, G \quad (7-7)$$

由此两式迭代计算即可的  $K_{in}$ 。

## 7.2. 动力学参数

### 7.2.1 缓发中子份额

以该组中子产生速率为权重，保证该组缓发中子总的产生速率守恒，对缓发中子份额求平均：

$$\beta_i = \frac{\sum_{g=1}^G \left[ \sum_{j=1}^J \left( \beta_{igj} \nu_{gj} \sum_{l=1}^L \nu_l \Sigma_{fgjl} \phi_{gl} \right) \right]}{\sum_{g=1}^G \left[ \sum_{j=1}^J \left( \nu_{gj} \sum_{l=1}^L \nu_l \Sigma_{fgjl} \phi_{gl} \right) \right]} \quad (7-8)$$

其中：  $i=1 \dots I$ ;

$J$  为考虑核素数目；

### 7.2.2 瞬发中子先驱核的衰变常数

以该组缓发中子产生速率为权重，对缓发中子先驱核衰变常数的倒数（相当于缓发中子先驱核的半衰期）求平均：

故，由

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{\sum_{g=1}^G \left[ \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{\lambda_{igj}} \beta_{igj} \nu_{gj} \sum_{l=1}^L \nu_l \Sigma_{fgjl} \phi_{gl} \right) \right]}{\sum_{g=1}^G \left[ \sum_{j=1}^J \left( \beta_{igj} \nu_{gj} \sum_{l=1}^L \nu_l \Sigma_{fgjl} \phi_{gl} \right) \right]} \quad (7-9)$$

得

$$\lambda_i = \frac{\sum_{g=1}^G \left[ \sum_{j=1}^J \left( \beta_{igj} \nu_{gj} \sum_{l=1}^L \nu_l \Sigma_{fgjl} \phi_{gl} \right) \right]}{\sum_{g=1}^G \left[ \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{\lambda_{ij}} \beta_{ij} \nu_{gj} \sum_{l=1}^L \nu_l \Sigma_{fgjl} \phi_{gl} \right) \right]} \quad (7-10)$$

其中： $i=1\dots I$ ;

### 7.3. 反应性反馈系数

在稳定工况下，对某一参数引进一个小扰动，通过计算扰动引起的反应行偏移量得到相应的反应性系数。对于堆芯内的空间分布量，扰动的引入方式为：所有空间位置处的该参数同等增加或减小某一小扰动值。在此计算的有燃料温度系数、冷却剂密度系数（冷却剂温度系数）和慢化剂温度系数。

$$\alpha_x = \frac{\rho(x_0 + \Delta x) - \rho(x_0)}{\Delta x} = \frac{k_{eff}(x_0 + \Delta x) - k_{eff}(x_0)}{k_{eff}(x_0 + \Delta x)k_{eff}(x_0)\Delta x} \quad (7-11)$$

## 8. 历史效应修正

在传统的压水堆堆芯物理计算两步法中，三维堆芯计算所需的少群常数由二维组件计算提供。由于堆芯内的状态参数（燃料温度、慢化剂温度、硼浓度、控制棒棒位等）随燃耗的变化非常复杂，所以一般选用堆芯内状态参数的历史平均值作为典型工况值。首先在典型工况下，对堆芯计算所需的各类组件进行主干的燃耗计算；然后通过在不同的燃耗点下改变状态参数值，对各类组件进行分支计算；最后将主干和分支计算所得的少群常数通过制表或者拟合的方式存于接口程序中，用于堆芯计算。由于控制棒的特殊性，一般选取控制棒全提作为控制棒的典型状态，再通过分支计算获得控制棒全插状态下的少群常数，如图 8-1 所示。

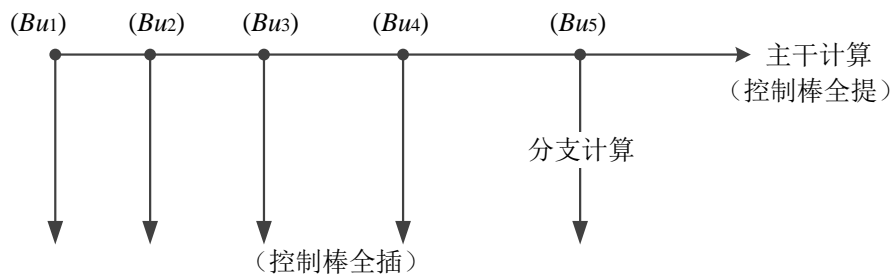


图 8-1 控制棒分支计算示意图

由两步法的计算流程可以看出，组件计算和堆芯计算之间存在着多方面的差异：第一，组件计算只在典型工况下进行主干燃耗计算，而堆芯真实的运行历史是非常复杂的；第二，组件计算采用的多群数据库，而堆芯计算往往采用组件并群后的少群数据库；第三，组件是在非常小的平源区进行计算，而堆芯则是在并区后的均匀化节块基础上进行计算。

由于组件计算与堆芯计算之间存在的巨大差异，使得组件计算所得的少群常数库与堆芯真实工况下的少群常数值之间存在差异。组件分支计算时，并不改变整个燃耗过程中各种核素的原子核密度、能谱历史和形状因子的历史，所以组件计算所得的这三个参数值只取决于所选的典型工况和燃耗深度，而堆芯真实的运行历史往往与典型工况历史不同，那么堆芯程序直接插值获得的某个工况点下的原子核密度、并群并区后的少群微观截面和宏观截面的值与堆芯真实历史下的值之间就必然存在差异。

由于主干燃耗计算未能考虑堆芯实际的运行历史，所以同类栅元或组件，在不同状态参数取值下历经不同的燃耗历史达到相同燃耗深度，其少群常数的取值也是不同的，即产生所谓的历史效应。由于历史效应是与燃耗相关的，因此会随着燃耗的加深，

有一个累积的过程。图 8-2 所示为控制棒历史效应的示意图，由图可以看出，同一个组件，经历不同的控制棒历史，达到相同的工况时，由于少群常数的历史累积效应，导致计算所得的无限增殖因子随着燃耗的加深，偏差逐渐增大。

由历史效应的产生原因不难看出，任何偏离典型工况的燃耗历史都会引起历史效应。根据各种状态参数的作用机制不同，可以将引起历史效应的原因分为三类。

第一，以硼浓度、慢化剂温度、燃料温度为代表，这些状态参数主要通过改变能谱随燃耗的变化历史来影响核素的燃耗历史。与堆芯真实的运行历史相比，典型工况历史下的能谱较硬时，则  $^{235}\text{U}$  消耗较慢、 $^{238}\text{U}$  吸收中子产生  $^{239}\text{Pu}$ 、次锕系核素积累较快，计算所得的少群常数必然偏离真实值，且由于原子核密度的累积效应，这个偏差会随着燃耗呈现增大的趋势。

第二，以功率水平为代表，该状态参数一方面通过改变燃料温度历史，进而影响能谱历史和核素的燃耗历史；另一方面则通过改变中子通量水平来影响核素的燃耗历史。受功率水平影响较大的往往是半衰期较短的核素，这些核素在功率水平变化的瞬间，原子核密度会有较大的改变，对于少群常数的计算势必带来较大的偏差。

第三，以控制棒的棒位变化为代表，对历史效应的贡献较为特殊，与上述两种平均作用于整个组件而言，这种状态参数主要是通过改变对组件内部通量分布及能谱随燃耗的变化来影响少群常数的计算。由于堆芯往往采用的是组件平均的少群常数，因此很难考虑控制棒的非均匀效应对历史效应的影响，其历史效应处理的复杂性也更高。

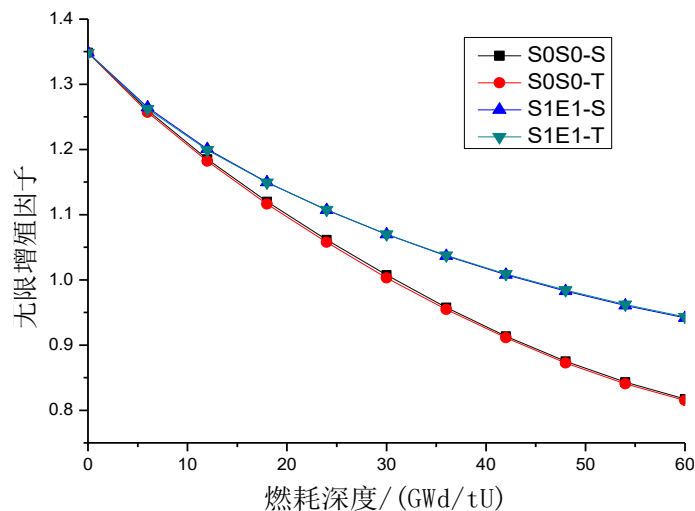


图 8-2 控制棒历史效应示意图

从上述历史效应产生的三大原因不难看出，核素的燃耗历史、能谱历史和组件内

部非均匀效应的变化历史是影响少群常数计算的三大因素，因此，对于历史效应的处理也往往从这几方面入手。

对于核素的燃耗历史处理，本文主要是通过通过在堆芯真实历史下对重要核素的原子核密度进行实时的追踪计算。以获得的堆芯真实历史下的原子核密度，对部分少群常数进行修正的方法称为微观燃耗修正方法。

能谱历史主要体现在少群微观截面、散射矩阵、扩散系数及动力学参数的计算中。本文利用  $^{235}\text{U}$ 、 $^{239}\text{Pu}$  和  $^{241}\text{Pu}$  三种对能谱历史变化较为敏感的核素作为能谱历史变化的向标，通过其原子核密度在不同历史下的差异来反映能谱历史的不同，进而对少群微观截面、散射矩阵、扩散系数及动力学参数进行修正，称之为基于重要核素的能谱修正方法。

## 8.1. 微观燃耗修正

历史效应最直接的体现就是原子核密度的差异，而原子核密度又是与少群宏观截面直接相关的量，因此对于核素原子核密度的修正非常必要。对于原子核密度的修正最直接有效的方法就是直接在堆芯中对组件计算所涉及的所有核素进行实时的跟踪计算。然而组件计算的核素数目往往成百上千，而每种核素所需要拟合的少群常数有 4-5 种，直接采用与组件计算相同的燃耗链进行计算，无论是计算效率还是拟合参数所需要的计算机内存，都是十分庞大的。

本文利用西安交通大学核工程计算物理实验室独立开发的燃耗数据库制作与压缩程序 NECP-Grape。对组件程序采用的燃耗链进行简化。为了保证燃耗链压缩过程中，不至于对后期的堆芯计算结果产生较大的影响，NECP-Grape 中采用基于定量分析的燃耗数据库压缩理论。在该理论中，首先将燃耗数据库的基本压缩单位分为反应道、核素和衰变核素三种，然后通过忽略基本压缩单位之间的干涉效应，并获得基本压缩单位对计算精度影响程度定量评价的方式，确定能够被接受的基本压缩单元，进而对燃耗链进行压缩。合理的定量评价需要充分考虑中子学-燃耗耦合效应，为了实现这个目的，首先需要设计一系列能够表征目标应用范围内特性变动范围的代表性问题；然后在精细燃耗数据库下对所设计的问题进行数值计算；最后，提取截面和原子核密度的信息，以供量化评价基本压缩单元重要性时使用。

本文为了实现在堆芯中对压缩燃耗链中涉及的核素进行燃耗计算，将西安交通大

学核工程计算物理实验室独立开发的点燃耗程序 NECP-Erica。接入三维堆芯程序 Bamboo-Core 中。NECP-Erica 中包含了四种点燃耗求解算法，包括线性子链方法、切比雪夫有理近似方法、线积分有理近似方法和拉盖尔多项式方法。

微观燃耗修正是在主干燃耗计算（即运行参数采用平均值进行的燃耗计算）或者分支计算所得的宏观截面的基础上，通过在堆芯中对各重要核素的原子核密度进行实时的燃耗计算，将真实历史下各重要核素的原子核密度回代到原宏观截面进行修正的方式来消除“历史效应”，其修正表达式为：

$$\Sigma^{\text{actual}} = \Sigma^{\text{base}} + \Delta\Sigma^{\text{branch}} + \sum_{i=1}^n (N_i^{\text{actual}} - \tilde{N}_i^{\text{base}}) \sigma_i^{\text{branch}} \quad (8-1)$$

式中： $\Sigma^{\text{actual}}$  为真实运行历史下的少群宏观截面/cm-1； $\Sigma^{\text{base}}$  为主干燃耗计算获得的少群宏观截面/cm-1； $\Delta\Sigma^{\text{branch}}$  为分支计算与相应燃耗点下的主干燃耗计算获得的少群宏观截面之差/cm-1； $N_i^{\text{actual}}$  为真实运行历史下第*i*种核素的原子核密度/barn<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>； $\tilde{N}_i^{\text{base}}$  为预处理后的主干燃耗计算下第*i*种核素的原子核密度/barn<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>； $\sigma_i^{\text{branch}}$  为分支计算下第*i*种核素的少群微观截面/barn；*n* 为堆芯中实时进行燃耗计算的核素的数目。

本文在 Bamboo-Core 中采用简化燃耗链，在节块层面对大约 78 种核素进行了燃耗计算，以 235U、238U、239Pu 等重核为主。

图 8-3 所示为堆芯中微观燃耗修正方法计算的流程图。堆芯燃耗计算时，首先通过读取各材料区各核素初始的原子核密度和燃耗链的信息，获得各核素原子核密度的初始分布和各追踪核素的燃耗信息；然后利用上一燃耗步各节块的通量和少群微观截面，通过点燃耗程序获得当前步预估步的原子核密度；接着，根据当前步的状态参数（慢化剂温度、燃料温度、硼浓度、控制棒等信息），从少群常数库插值获得当前步的少群宏观截面和微观截面，利用公式(8-1)对少群宏观截面进行修正；待物理-热工耦合迭代结束后，利用收敛后热工参数插值获得的少群宏观截面和微观截面以及节块通量，通过点燃耗程序获得当前步校正步的原子核密度，将预估步和校正步的原子核密度求平均，获得当前步真实的原子核密度；最后，利用最终求得的原子核密度对少群宏观截面进行修正，修正后的宏观截面用于堆芯中子学计算，以获得当前步下的相



关参数。

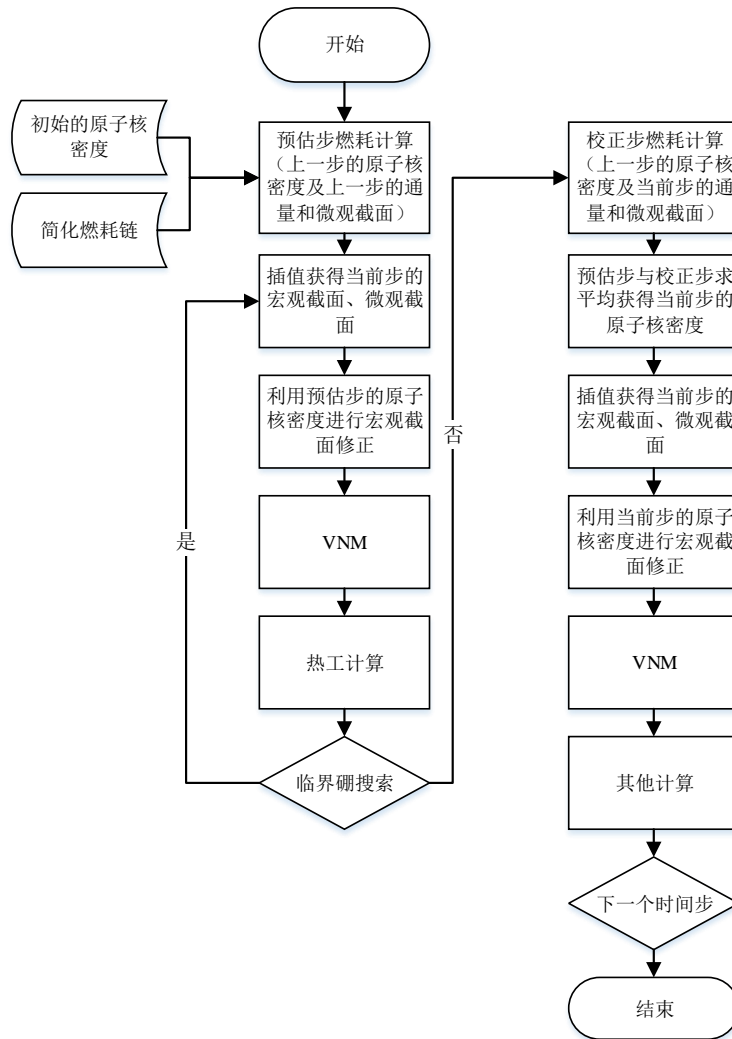


图 8-3 微观燃耗修正方法修正历史效应的计算流程

为了保持堆芯与组件主干燃耗的原子核密度计算条件相同，需要利用组件主干燃耗计算获得的各个燃耗点下的少群通量和少群微观截面，采用与堆芯燃耗计算相同的燃耗链，重新计算得到预处理后的第*i*种的原子核密度 $\tilde{N}_i^{\text{base}}$ 。本文为了实现对 $\tilde{N}_i^{\text{base}}$ 的计算，在接口程序中接入了点燃耗程序 NECP-Erica。

$\tilde{N}_i^{\text{base}}$  的计算流程如图 8-4 所示。燃耗计算时，首先需要读取组件燃耗计算时各个燃耗点下的少群微观截面和平均通量以及初始的原子核密度；然后利用上一燃耗步的通量和少群微观截面，通过点燃耗程序获得当前步预估步的原子核密度；接着，利用当前步微观截面和通量，通过点燃耗程序获得当前步校正步的原子核密度；最后，将预估步和校正步的原子核密度求平均，获得当前步真实的原子核密度，并将计算所得

的原子核密度以燃耗深度的函数形式存入少群常数库中供堆芯插值。

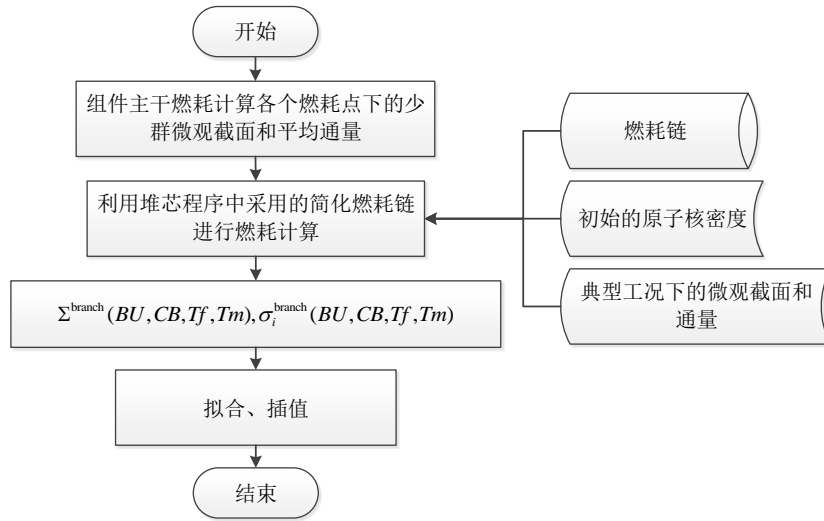


图 8-4 主干燃耗计算所得的原子核密度预处理流程图

## 8.2. 基于重要核素的能谱修正

与微观燃耗修正相比，能谱修正通过引入能够反映不同历史的变量，来对少群常数进行修正，其修正表达式为：

$$Y^{\text{actual}} = Y^{\text{base}} + \Delta Y^{\text{branch}} + \sum_i \left( \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right) \Delta X_i \quad (8-2)$$

式中： $Y^{\text{actual}}$  表示真实运行历史下的少群常数值； $Y^{\text{base}}$  为主干燃耗计算获得的少群常数值； $\Delta Y^{\text{branch}}$  分支计算与主干燃耗计算所得的少群常数值之差； $X_i$  表示引入的历史变量。

根据引入的历史变量不同，能谱修正又可以细分为以下三类：能谱历史因子、状态参数历史平均值和基于重要核素的能谱修正。本文选用基于重要核素的能谱修正方法，其基本思想是选中不同历史下原子核密度变化较大即原子核密度对不同的历史比较敏感的几个核素，利用其原子核密度的相对偏差与所修正量的相对偏差成正比的关系来修正历史效应。图 8-5 和图 8-6 分别比较了深燃耗下，经历不同控制棒历史时，各重核的原子核密度及其偏差，由两幅图可以看出  $^{235}\text{U}$ 、 $^{239}\text{Pu}$  和  $^{241}\text{Pu}$  无论是原子核密度还是对控制棒历史的敏感性都是非常高的，因此选用此三种核素来修正能谱历史。

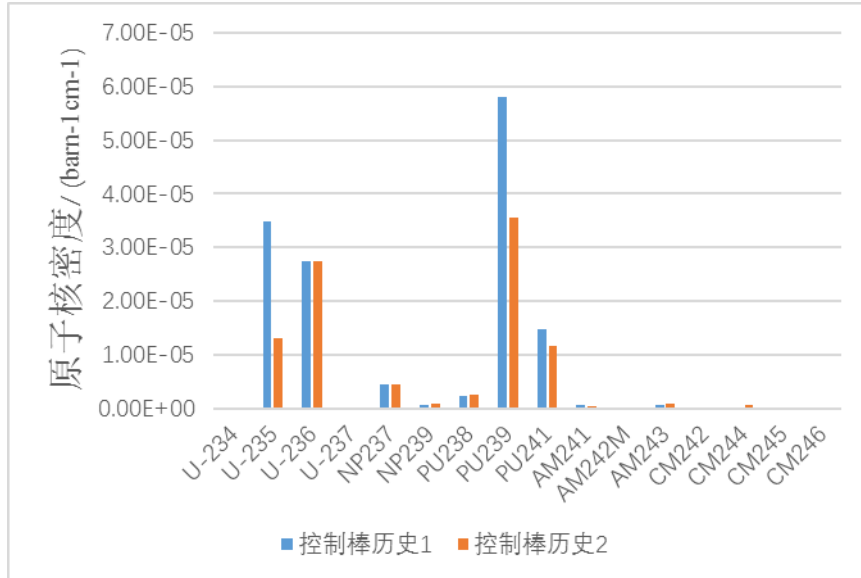


图 8-5 不同控制棒历史下重要核素的原子核密度

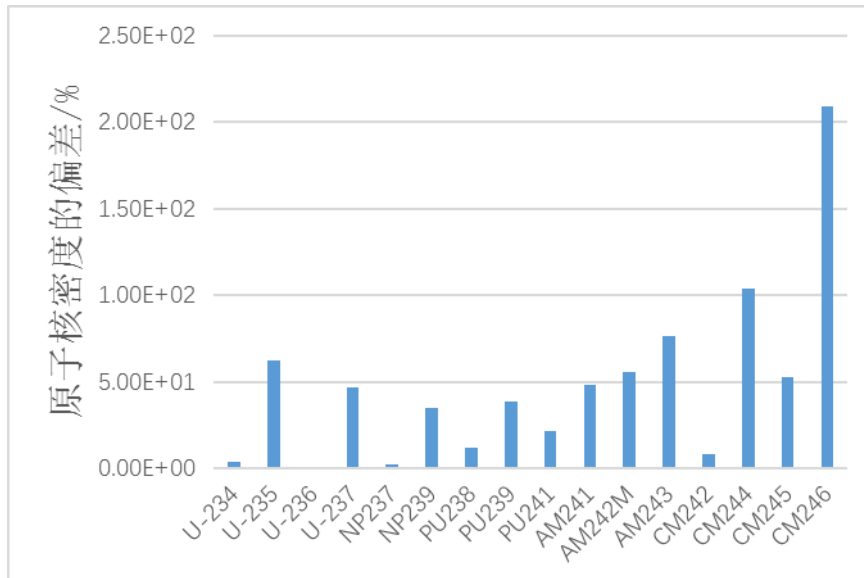


图 8-6 不同控制棒历史下重要核素的原子核密度相对偏差

以少群微观截面的修正为例，其基于重要核素的能谱修正表达式为：

$$\sigma_i^{\text{actual}} = \sigma_i^{\text{branch}} \left[ 1 + k \left( \frac{N_3^{\text{actual}}}{\tilde{N}_3^{\text{base}}} - 1 \right) \right] \quad (8-3)$$

式中： $\sigma_i^{\text{actual}}$  为真实运行历史下第*i*种核素的少群微观截面/barn； $\sigma_i^{\text{branch}}$  为分支计算下第*i*种核素的少群微观截面/barn；*k* 为修正系数； $N_3^{\text{actual}}$  为分支计算所获得的三种核素（<sup>235</sup>U/<sup>239</sup>Pu/<sup>241</sup>Pu）的原子核密度之和/barn<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>； $\tilde{N}_3^{\text{base}}$  为预处理后的主干燃耗计算下三种核素（<sup>235</sup>U/<sup>239</sup>Pu/<sup>241</sup>Pu）的原子核密度之和/barn<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>，计算方法与

8.1 节中的  $\tilde{N}_i^{\text{base}}$  类似。

修正因子  $k$  的表达形式为：

$$k(Bu, CB, T_f, T_m) = \frac{\sigma_i^{\text{refh}}(Bu, CB, T_f, T_m) - \sigma_i^{\text{branch}}(Bu, CB, T_f, T_m)}{\sigma_i^{\text{branch}}(Bu, CB, T_f, T_m)} \bigg/ \frac{N_3^{\text{refh}} - N_3^{\text{base}}}{N_3^{\text{base}}} \quad (8-4)$$

式中： $k$  为修正系数； $\sigma_i^{\text{refh}}$  为非典型工况燃耗计算下第  $i$  种核素的少群微观截面/barn； $\sigma_i^{\text{branch}}$  为分支计算下第  $i$  种核素的少群微观截面/barn； $N_3^{\text{refh}}$  为非典型工况燃耗计算所获得的三种核素（ $^{235}\text{U}/^{239}\text{Pu}/^{241}\text{Pu}$ ）的原子核密度之和/ $\text{barn}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ ； $N_3^{\text{base}}$  为主干燃耗计算所获得的三种核素（ $^{235}\text{U}/^{239}\text{Pu}/^{241}\text{Pu}$ ）的原子核密度之和/ $\text{barn}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ 。

由公式(8-4)的表达形式可以看出，为了求得修正因子  $k$ ，组件计算时，除了进行常规的主干燃耗计算和分支计算外，还需要增加额外的非典型工况的燃耗计算。而非典型工况往往根据需求，在分支计算的工况中选取。以控制棒为例，图 8-7 所示为控制棒非典型状态（全插）的燃耗计算示意图。

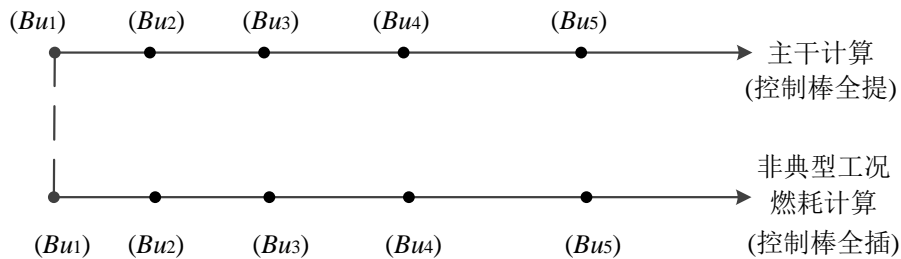


图 8-7 控制棒非典型工况燃耗示意图

除了额外的燃耗计算之外，还需要对少群微观截面和修正因子  $k$  像少群宏观截面一样，拟合成状态参数的函数，存储于少群常数库中，供堆芯插值使用。

根据不漏不重、尽量精简的状态参数选择原则，选取的状态参数有燃耗深度  $Bu$ ，硼浓度  $CB$ ，燃料温度  $T_f$ ，慢化剂温度  $T_m$ ，有无控制棒  $CR$ ，等等。由于控制棒只有全提和全插两种状态，相比于其他状态参数的连续取值而言，较为特殊，一般将其作为独立变量，将其对少群常数的影响表示为单独的修正分项：

$$Y = f_{\text{base}}(Bu, CB, T_f, T_m) + \delta(CR) \cdot f_{\text{crt}}(Bu, CB, T_f, T_m) \quad (8-5)$$

式中： $Y$  为拟合的少群常数； $f_{\text{base}}$  为群常数拟合基项； $f_{\text{crt}}$  为修正分项。 $\delta$  函数定

义为:

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{无控制棒} \\ 1, & \text{有控制棒} \end{cases} \quad (8-6)$$

由于公式(8-5)中的每个分项中的状态参数较多, 为了保证计算精度的前提下, 尽量提高拟合效率, 根据耦合关系将状态参数进行分组, 分组后的表达形式为:

$$Y = f_{base}(Bu, CB) \cdot f_{crit}(Tf) + f_{crit}(Tm, CB) + \delta(CR) \cdot (f_{crit}(Bu, CB) \cdot f_{crit}(Tf) + f_{crit}(Tm, CB)) \quad (8-7)$$

本文采用最小二乘方法对少群常数进行拟合, 由于最小二乘方法对于拟合分段和阶数选取较为敏感, 为了使少群微观截面和修正因子 $k$ 达到较好的拟合效果。

### 8.3. 复合修正

本文采用 8.1 节提及的微观燃耗修正结合 8.2 节提及的基于重要核素的能谱修正的方法, 对少群宏观吸收截面和宏观裂变截面进行修正, 其修正表达式为:

$$\Sigma^{actual} = \Sigma^{base} + \Delta\Sigma^{branch} + \sum_{i=1}^n (N_i^{actual} \sigma_i^{actual} - \tilde{N}_i^{base} \sigma_i^{branch}) \quad (8-8)$$

式中:  $\Sigma^{actual}$  为真实运行历史下的少群宏观截面/cm-1;  $\Sigma^{base}$  为主干燃耗计算获得的少群宏观截面/cm-1;  $\Delta\Sigma^{branch}$  为分支计算与相应燃耗点下的主干燃耗计算获得的少群宏观截面之差/cm-1;  $N_i^{actual}$  为真实运行历史下第 $i$ 种核素的原子核密度/barn<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>;  $\sigma_i^{actual}$  为真实运行历史下第 $i$ 种核素的少群微观截面/barn;  $\tilde{N}_i^{base}$  为预处理后的主干燃耗计算下第 $i$ 种核素的原子核密度/barn<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>;  $\sigma_i^{branch}$  为第 $i$ 种核素分支计算下的少群微观截面/barn;  $n$  为堆芯中实时进行燃耗计算的核素的数目。

图 8-8 所示为堆芯中采用复合修正方法修正历史效应的计算流程图, 其与 8.1 节中的微观燃耗修正方法在求解原子核密度时的流程基本相同, 均采用预估校正的计算策略, 增加了修正因子 $k$ 的插值和少群微观截面的修正。

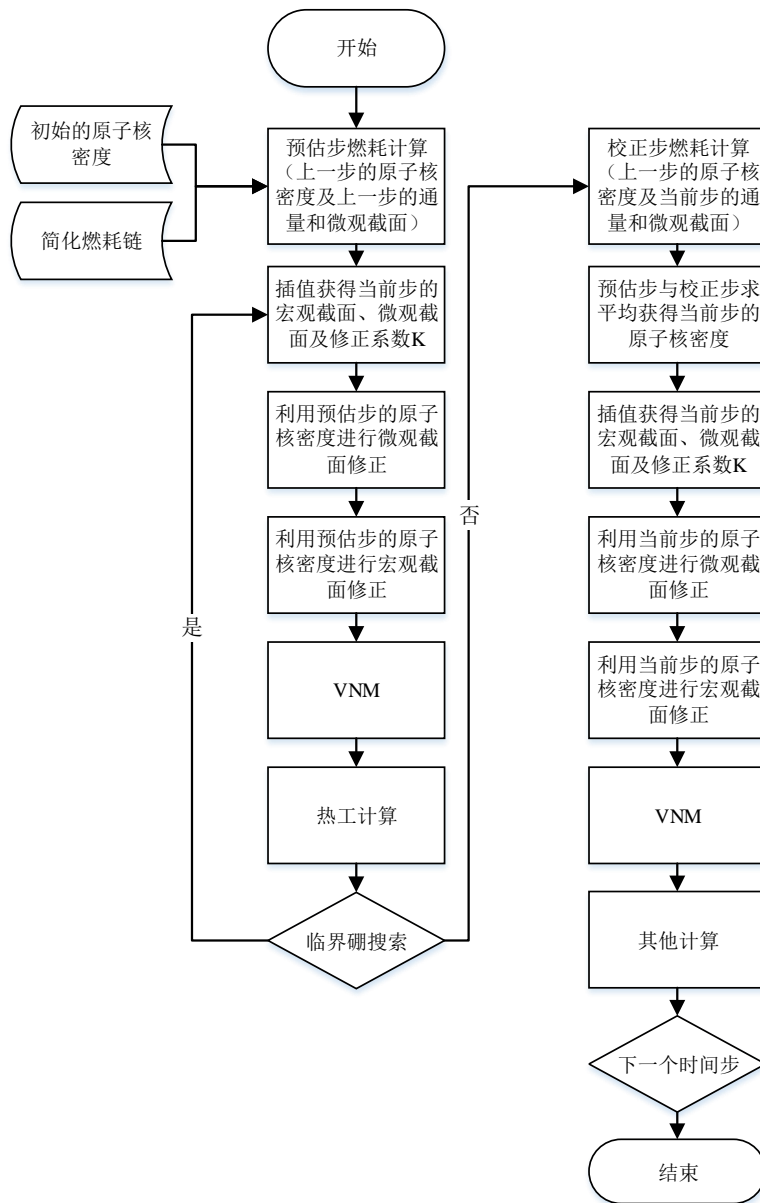


图 8-8 复合修正方法修正历史效应的计算流程

由图 8-8 可以看出，采用复合修正方法对历史效应进行修正时，首先通过读取各材料区各核素初始的原子核密度和燃耗链的信息，获得各核素原子核密度的初始分布和各追踪核素的燃耗信息；然后利用上一燃耗步各节块的通量和少群微观截面，通过点燃耗程序获得当前步预估步的原子核密度；接着，根据当前步的状态参数（慢化剂温度、燃料温度、硼浓度、控制棒等信息），从少群常数库插值获得当前步的少群宏观截面、微观截面和修正因子  $k$ ，利用预估步的原子核密度对少群微观截面进行修正，修正表达式如(8-3)所示；通过修正后的少群微观截面和预估步的原子核密度，利用公

式(8-8)对少群宏观截面进行修正；待物理-热工耦合迭代结束后，利用修正后的少群宏观截面、微观截面以及节块通量，通过点燃耗程序获得当前步校正步的原子核密度，将预估步和校正步的原子核密度求平均，获得当前步真实的原子核密度；利用当前步真实的原子核密度对少群微观截面进行修正；最后，利用最终求得的原子核密度和修正后的少群微观截面对少群宏观截面进行修正，修正后的宏观截面用于堆芯中子学计算，以获得当前步下的相关参数。

## 9. 控制棒尖齿效应

图 9-1 所示为传统的压水堆堆芯物理计算两步法计算流程示意图。由图 9-1 可以看出，整个堆芯物理计算从多群数据库出发，首先通过二维组件程序进行组件层面的计算，包括典型的慢化剂温度、燃料温度、硼浓度等状态参数下的主干燃耗计算以及选定燃耗点下对于各种状态参数的分支计算；然后，将组件计算所得的均匀化少群常数以表格或者拟合系数的形式存储于接口程序中；最后，三维堆芯程序通过插值获得真实状态点下的少群常数进行中子学计算和热工水力计算。

由于组件程序进行的是二维计算，因此控制棒的状态只能是全提或者全插。在实际的计算中，主干燃耗计算时往往采用控制棒全提的状态，再通过选定燃耗点下的分支计算，获得控制棒全插状态下的少群常数。

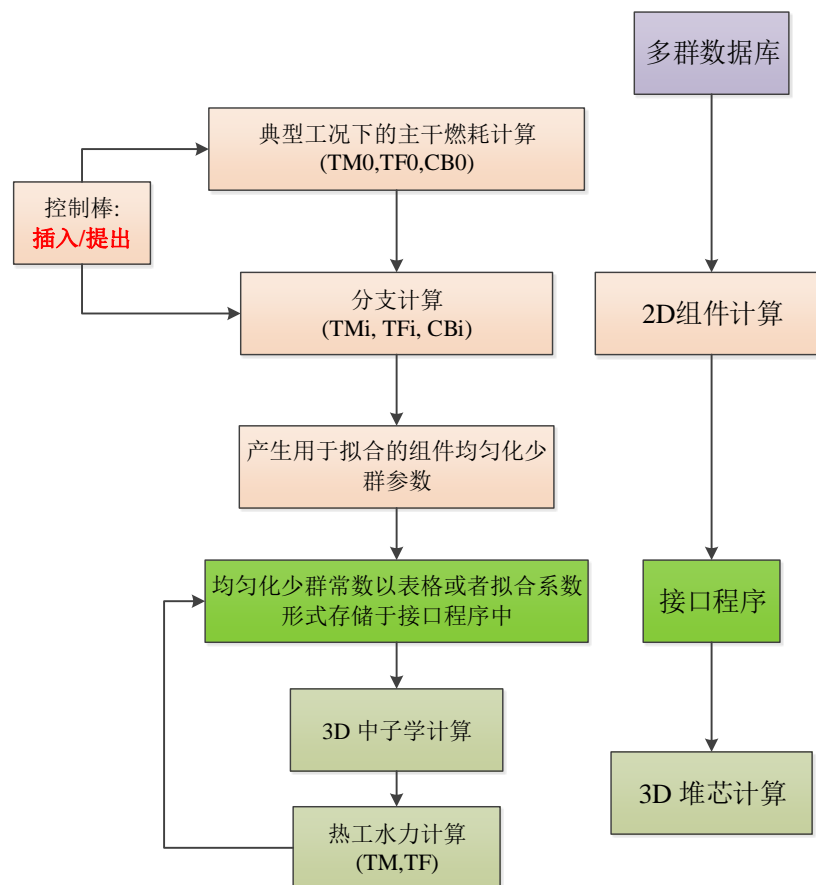


图 9-1 两步法的计算流程

目前，商用的三维堆芯程序中大多采用的是节块方法。节块方法是 80 年代以后，为了克服有限差分方法网格划分过小、计算时间和内存过大的问题，而迅速发展起来



的快速有效的堆芯计算方法。节块法通常可以在比较宽的网距下，例如可选取一个组件长度（20cm 左右）作为一个节块，获得与有限差分方法相当的计算精度，但是计算时间和存储会有量级上的降低。

由压水堆堆芯物理计算两步法的计算流程可以看出，二维组件计算的控制棒只有全提和全插两个状态，因此无法考虑到控制棒组件轴向的非均匀效应。而在实际的堆芯中，特别是在像 AP1000 这种三代先进反应堆的设计中，为了调节功率，控制棒往往长期插入堆芯且移动频繁。变分节块法中往往以一个组件（20 厘米左右）作为一个节块进行计算，而控制棒的移动步长（3 厘米左右）远小于节块的尺寸，这使得控制棒在移动的过程中，末端位置的不确定性与节块划分之间的不匹配出现的可能性大大增加，即控制棒组件中出现部分插入节块的频率大大增加。

目前的变分节块法要求节块内部的材料均匀单一，因此部分插入节块的出现，给节块方法的计算带来了一定的挑战。如何获得部分插入节块的均匀化截面成为节块方法计算的先决条件。传统的处理方法是直接对部分插入节块含棒和不含棒两部分的少群均匀化截面采取体积权重的方法来获得均匀化截面。由于部分插入节块含棒与不含棒两部分的径向尺寸相同，因此可以直接用轴向的高度代替体积。以图 9-2 所示的部分插入节块为例，体积权重方法获得部分插入节块  $k$  均匀化少群宏观截面的表达式为：

$$\begin{aligned}\Sigma_k &= f_{k,\text{CR}}\Sigma_{k,\text{CR}} + f_{k,\text{noCR}}\Sigma_{k,\text{noCR}} \\ &= \frac{h_{\text{CR}}}{h_{\text{CR}} + h_{\text{noCR}}}\Sigma_{k,\text{CR}} + \frac{h_{\text{noCR}}}{h_{\text{CR}} + h_{\text{noCR}}}\Sigma_{k,\text{noCR}}\end{aligned}\quad (9-1)$$

式中： $\Sigma_k$  为部分插入节块均匀化后的少群宏观截面/cm-1； $f_{k,\text{CR}}$  为部分插入节块含棒部分的权重因子； $\Sigma_{k,\text{CR}}$  为部分插入节块含棒部分的少群宏观截面/cm-1； $f_{k,\text{noCR}}$  为部分插入节块不含棒部分的权重因子； $\Sigma_{k,\text{noCR}}$  为部分插入节块不含棒部分的少群宏观截面/cm-1； $h_{\text{CR}}$  为部分插入节块含棒部分的高度/cm； $h_{\text{noCR}}$  为部分插入节块不含棒部分的高度/cm。

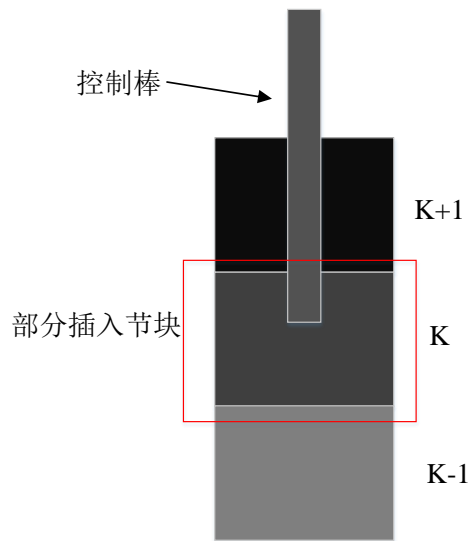


图 9-2 含有部分插入节块的组件示意图

由于体积权重方法无法保证均匀化前后部分插入节块的反应率守恒，因此造成控制棒微分价值随棒位的变化呈现出锯齿形状，如图 9-3 所示，称之为控制棒尖齿效应。

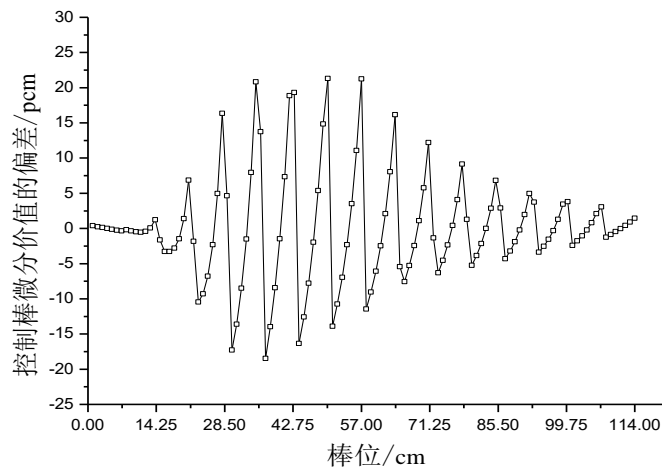


图 9-3 控制棒尖齿效应示意图

通过分析控制棒尖齿效应产生的原因，我们不难看出，如何获得准确的部分插入节块的均匀化截面是解决控制棒尖齿效应问题的关键。处理控制棒尖齿效应的方法可以归为两大类：

第一，直接将部分插入节块从控制棒的尖端分为两部分，即消除部分插入节块的存在，从根源上解决控制棒尖齿效应；

第二，获得部分插入节块内部的通量分布，以通量体积作为权重，对部分插入节块的截面进行均匀化处理，以达到保证反应率守恒的目的。

## 9.1. 自适应网格方法

自适应网格方法，即动态网格方法，其实质是将轴向的网格划分随着控制棒的移动进行动态的变化，以保证控制棒的末端始终与节块的边界重合。

图 9-4 为在堆芯程序 Bamboo-Core 中实现自适应网格方法的示意图，该方法首先需要根据输入卡片中控制棒在堆芯的分布，找出控制棒组件所在的节块束；然后根据各组控制棒末端在堆芯中的位置，判断出存在部分插入节块的控制棒节块束；接着，通过判断各部分插入节块及控制棒末端在其内部的轴向位置是否相同，来确定轴向需要进行网格划分的节块数及其内部的划分层数；最后，在原有的节块划分基础上，在全堆范围内，增加轴向网格的划分，并在新的节块划分基础上进行三维的堆芯计算。控制棒每移动一步，轴向的网格都要重新划分一次。

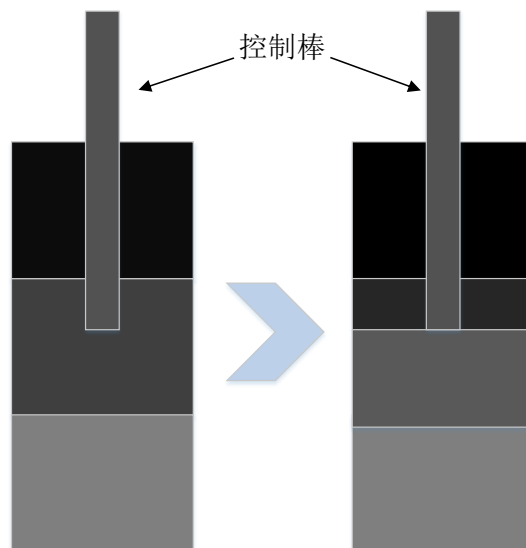


图 9-4 自适应网格方法示意图

自适应网格的计算流程如图 9-5 所示：

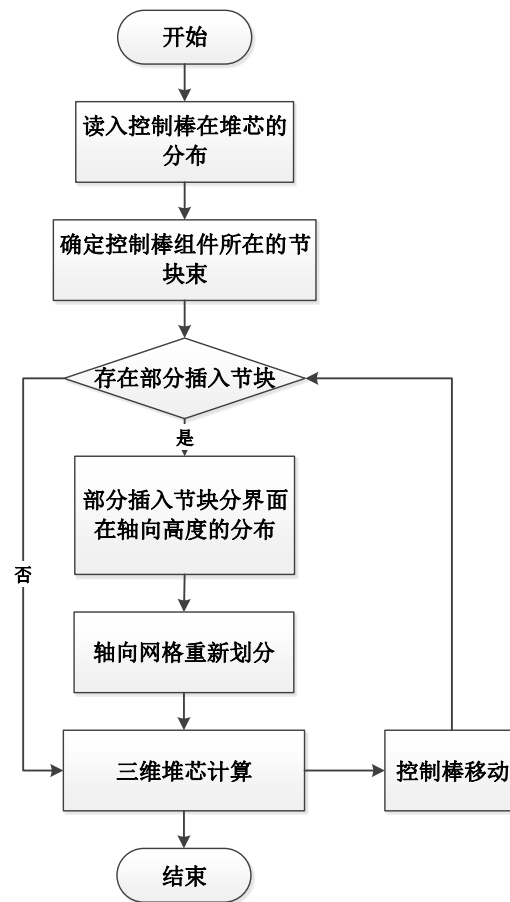


图 9-5 自适应网格方法的计算流程图

## 9.2. 广义等效均匀化方法

广义等效均匀化方法与自适应网格的实时网格划分不同，是在原有节块的划分基础上进行计算的同时，加入含有部分插入节块的控制棒组件的一维细网扩散计算，通过二者之间的耦合达到获得较为精确的部分插入节块均匀化截面的目的。

传统的均匀化方法将注意力主要集中在单个节块的反应率守恒上，而忽略均匀化区域净流的守恒。传统均匀化方法是对每个不同类型的非均匀组件进行中子输运方程的求解，在计算时假定组件的界面上净流为零，并采用通量体积权重的方法来获得均匀化后的扩散系数，这就使得节块各个界面上的界面净流不守恒，同时也无法保证各个均匀化区域内各种积分反应率的守恒。

广义等效均匀化方法，则在传统的均匀化方法的基础上，通过引入部分插入节块两个面上的不连续因子达到保证界面净流守恒的目的。

在进行广义等效均匀化方法的计算时，首先需要判断部分插入节块所在的节块

束；然后对含有部分插入节块的节块束依次进行全一维轴向细网划分，网格的尺寸往往综合考虑控制棒末端位置、节块边界以及控制棒的移动步长进行个性化的划分，以保证每个细网中只含有一种材料，且满足细网差分的计算要求；最后，对各节块束分别进行一维细网计算，获得各部分插入节块的轴向通量分布，并利用细网通量进行通量体积权重，从而获得部分插入节块的均匀化截面。

三维的分群中子扩散方程表达式为：

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{tg} \phi_g(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^G (\Sigma_{s,g' \rightarrow g} + \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} (\nu \Sigma_f)_{g'}) \phi_{g'}(\vec{r}) \quad (9-2)$$

式中： $D_g$  为第  $g$  群的扩散系数/cm； $\phi_g$  为第  $g$  群的中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $\Sigma_{tg}$  为第  $g$  群的宏观总截面/cm-1； $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$  为第  $g'$  群到第  $g$  群的宏观散射截面/cm-1； $\chi_g$  为第  $g$  群裂变能谱； $k_{\text{eff}}$  为有效增殖因子； $(\nu \Sigma_f)_{g'}$  为第  $g'$  群的中子产生截面/cm-1； $\phi_{g'}$  为第  $g'$  群的中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>。

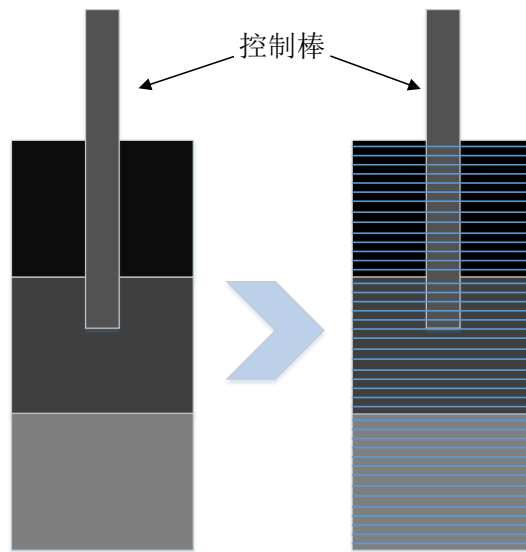


图 9-6 广义等效均匀化方法示意图

一维细网计算时，轴向上下两个面采取与三维堆芯相同的边界条件，径向则将横向泄漏作为负源处理。由于负源计算需要用到三维计算获得的各节块的中子流，因此在初始计算时，往往采用体积权重方法获得部分插入节块的均匀化截面，进行三维堆芯计算。在后续的计算中，由于控制棒的移动步长较小，往往将控制棒在上一步的泄漏项，作为当前步初始的负源项。

在三维扩散方程的基础上，使用横向积分方法，对中子扩散方程在  $x$ 、 $y$  方向上积分获得一维“横向积分”方程：

$$-D_g \frac{d^2 \phi_{gz}(z)}{dz^2} + \Sigma_{rg} \phi_{gz}(z) = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G (\Sigma_{s,g' \rightarrow g} + \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} (\nu \Sigma_f)_{g'}) \phi_{g'z}(z) - L_{gz}(z) \quad (8-9)$$

式中： $D_g$  为第  $g$  群的扩散系数/cm； $\phi_{gz}$  为横向积分后的第  $g$  群偏中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $\Sigma_{rg}$  为第  $g$  群的宏观移出截面/cm-1； $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$  为第  $g'$  群到第  $g$  群的宏观散射截面/cm-1； $\chi_g$  为第  $g$  群裂变能谱； $k_{\text{eff}}$  为有效增殖因子； $(\nu \Sigma_f)_{g'}$  为第  $g'$  群的中子产生截面/cm-1； $\phi_{g'z}$  为横向积分后第  $g'$  群的偏中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $L_{gz}$  的是  $x$ 、 $y$  方向的横向泄漏。

偏中子通量密度  $\phi_{gz}$  的表达式为：

$$\phi_{gz}(z) = \frac{1}{a_x a_y} \int_{-a_y}^{-a_x} dy \int_{-a_x}^{-a_y} \phi_g(x, y, z) dx \quad (9-3)$$

式中： $\phi_{gz}$  为横向积分后的第  $g$  群偏中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $a_x$  为  $x$  方向的节块宽度/cm； $a_y$  为  $y$  方向的节块宽度/cm； $\phi_g$  为第  $g$  群的中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>。

横向泄漏项  $L_{gz}$  表达式为：

$$L_{gz}(z) = -\frac{1}{a_x a_y} \left[ \int_{-a_x/2}^{a_x/2} D_g \frac{\partial}{\partial y} \phi_g(x, y, z) \Big|_{y=-a_y/2}^{y=a_y/2} dx + \int_{-a_y/2}^{a_y/2} D_g \frac{\partial}{\partial x} \phi_g(x, y, z) \Big|_{x=-a_x/2}^{x=a_x/2} dy \right] \quad (8-10)$$

式中： $L_{gz}$  为  $x$ 、 $y$  方向的横向泄漏； $a_x$  为  $x$  方向的节块宽度/cm； $a_y$  为  $y$  方向的节块宽度/cm； $D_g$  为第  $g$  群的扩散系数/cm； $\phi_g$  为第  $g$  群的中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>。

在进行一维细网计算时，对于横向泄漏采取平坦近似，则节块内部的平均泄漏可以表示为：

$$\bar{L}_{gz} = \frac{1}{a_x} \left[ J_x\left(\frac{a_x}{2}\right) - J_x\left(-\frac{a_x}{2}\right) \right] + \frac{1}{a_y} \left[ J_y\left(\frac{a_y}{2}\right) - J_y\left(-\frac{a_y}{2}\right) \right] \quad (9-4)$$

式中： $\bar{L}_{gz}$  为节块平均的横向泄漏； $a_x$  为  $x$  方向的节块宽度/cm； $J_x$  为  $x$  方向的净中子流/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $a_y$  为  $y$  方向的节块宽度/cm； $J_y$  为  $y$  方向的净中子流/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>。

由公式错误!未找到引用源。可知，在对节块内部的横向泄漏采用平坦近似时，只要获得节块  $x$ 、 $y$  方向上四个表面的净中子流就可以计算得到节块的横向泄漏。在进行一维细网计算时，径向四个面的净中子流由三维堆芯计算提供。

将横向泄漏等价地转化成伪吸收截面：

$$\Sigma'_{a,g} = \bar{L}_{gz} / \Phi_g \quad (9-5)$$

式中： $\Sigma'_{a,g}$  为第  $g$  群的伪吸收截面/cm-1， $\bar{L}_{gz}$  为节块平均的横向泄漏； $\Phi_g$  为节块第  $g$  群  $x$ 、 $y$  方向的平均通量/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>，由 3D 堆芯计算获得。

引入伪吸收截面后，“横向积分”方程转化为：

$$-D'_g \frac{d^2 \phi_{gz}(z)}{dz^2} + \Sigma'_{rg} \phi_{gz}(z) = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G (\Sigma_{s,g' \rightarrow g} + \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} (v\Sigma_f)_{g'}) \phi_{g'z}(z) \quad (9-6)$$

式中： $D'_g$  为用伪吸收截面修正后第  $g$  群的扩散系数/cm； $\phi_{gz}$  为横向积分后的第  $g$  群偏中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $\Sigma'_{rg}$  为用伪吸收截面修正后第  $g$  群的宏观移出截面/cm-1； $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$  为第  $g'$  群到第  $g$  群的宏观散射截面/cm-1； $\chi_g$  为第  $g$  群裂变能谱； $k_{\text{eff}}$  为有效增殖因子； $(v\Sigma_f)_{g'}$  为第  $g'$  群的中子产生截面/cm-1； $\phi_{g'z}$  为横向积分后的第  $g'$  群偏中子通量密度/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>。

轴向细网通量体积权重方法的计算流程如图 9-7 所示：

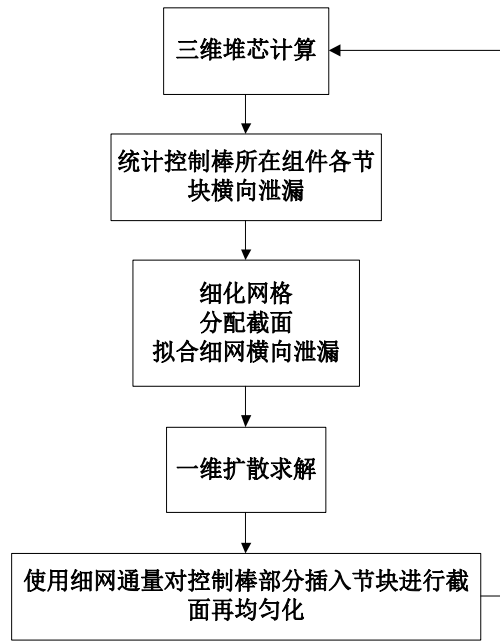


图 9-7 广义等效均匀化方法的计算流程图

采用通量体积分权的传统均匀化方法获得的均匀化少群常数只能保证均匀化前后反应率的守恒，而无法保证部分插入节块上下两个表面净中子流的守恒，为了获得等效的均匀化界面，需要在部分插入节块上下两个表面引入不连续因子。

不连续因子的表达式为：

$$f_s = \frac{\phi^{s,\text{het}}}{\phi^{s,\text{hom}}} \quad (9-7)$$

式中： $f_s$  为不连续因子； $\phi^{s,\text{het}}$  为非均匀的面通量，通过非均匀的细网计算获得  $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ； $\phi^{s,\text{hom}}$  为均匀的面通量则是将部分插入节块均匀化后，由一维细网计算获得  $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

### 9.3. 近似通量体积分权重方法

近似通量体积分权重方法与广义等效均匀化方法类似，都是通过一定的方法获得部分插入节块内部的轴向通量分布，然后将通量体积作为权重实现部分插入节块的截面均匀化，不同的是，近似通量体积分权重方法不进行额外的扩散计算，而是通过与部分插入节块轴向相邻的完全插棒节块和完全不插棒节块平均通量的引入，来获得部分插



入节块两部分的平均通量。

如图 9-8 所示，为含有部分插入节块的控制棒组件示意图，其中轴向第  $k$  个节块是部分插入节块，第  $k+1$  和  $k-1$  个节块分别是完全插棒节块和完全不插棒节块。

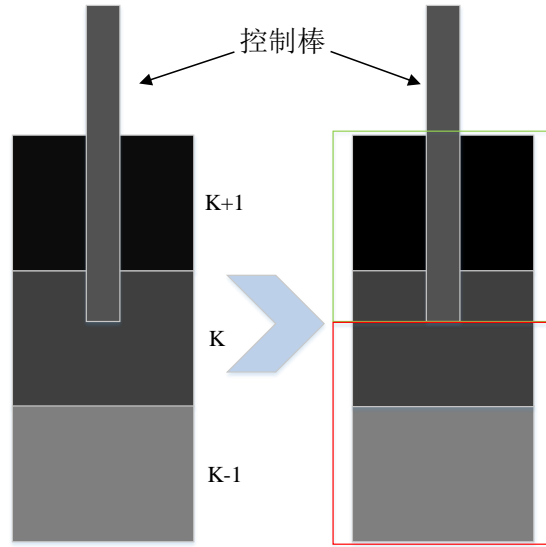


图 9-8 近似通量体积权重方法示意图

近似通量体积权重方法假设部分插入节块含棒部分的通量受制于相邻的完全插棒节块和部分插入节块的平均通量，而不含棒部分则取决于相邻的完全不插棒节块和部分插入节块的平均通量，因此部分插入节块两部分的平均通量可以分别表示为：

$$\begin{cases} \bar{\phi}_{\text{CR}} = \frac{h_{k+1}\bar{\phi}_{k+1} + h_{\text{CR}}\bar{\phi}_k}{h_{k+1} + h_{\text{CR}}} \\ \bar{\phi}_{\text{noCR}} = \frac{h_{k-1}\bar{\phi}_{k-1} + h_{\text{noCR}}\bar{\phi}_k}{h_{k-1} + h_{\text{noCR}}} \end{cases} \quad (9-8)$$

式中： $\bar{\phi}_{\text{CR}}$  为部分插入节块含棒部分的平均通量/ $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ； $h_{k+1}$  为完全插棒节块的高度/cm； $\bar{\phi}_{k+1}$  为完全插棒节块的平均通量/ $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ； $h_{\text{CR}}$  为部分插入节块含棒部分的高度/cm； $\bar{\phi}_k$  为部分插入节块的平均通量/ $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ； $\bar{\phi}_{\text{noCR}}$  为部分插入节块不含棒部分的平均通量/ $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ； $h_{k-1}$  为完全不插棒节块的高度/cm； $\bar{\phi}_{k-1}$  为完全不插棒节块的平均通量/ $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ； $h_{\text{noCR}}$  为部分插入节块不含棒部分的高度/cm。

部分插入节块的均匀化截面可以表示为：

$$\Sigma_k = \lambda_{k,CR} \Sigma_{k,CR} + \lambda_{k,noCR} \Sigma_{k,noCR} \begin{cases} \lambda_{k,CR} = \frac{\bar{\phi}_{CR} h_{CR}}{\phi_{CR} h_{CR} + \phi_{noCR} h_{noCR}} \\ \lambda_{k,noCR} = \frac{\bar{\phi}_{noCR} h_{noCR}}{\bar{\phi}_{CR} h_{CR} + \bar{\phi}_{noCR} h_{noCR}} \end{cases} \quad (9-9)$$

式中： $\Sigma_k$  为部分插入节块的均匀化截面/cm-1； $\lambda_{k,CR}$  为部分插入节块含棒部分的权重因子； $\Sigma_{k,CR}$  为部分插入节块含棒部分的截面/cm-1； $\lambda_{k,noCR}$  为部分插入节块不含棒部分的权重因子； $\Sigma_{k,noCR}$  为部分插入节块不含棒部分的截面/cm-1； $\bar{\phi}_{CR}$  为部分插入节块含棒部分的平均通量/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $h_{CR}$  为部分插入节块含棒部分的高度/cm； $\bar{\phi}_{noCR}$  为部分插入节块不含棒部分的平均通量/cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>； $h_{noCR}$  为部分插入节块不含棒部分的高度/cm。

近似通量体积权重方法的计算流程如图 9-9 所示。

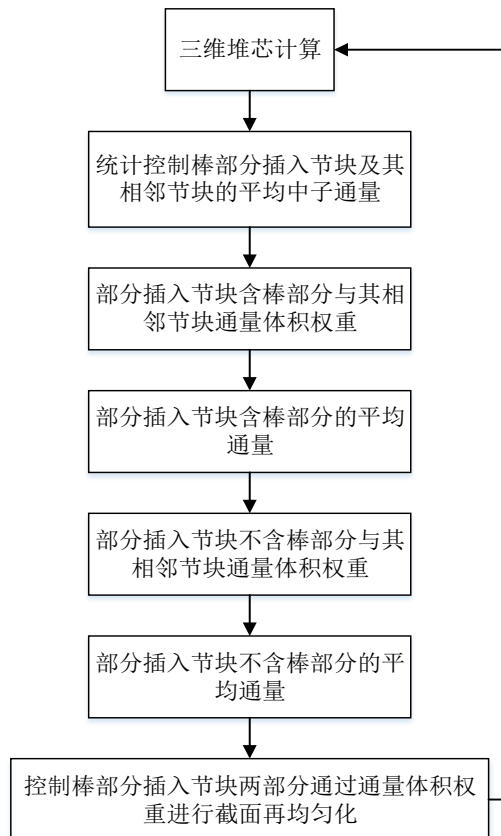


图 9-9 近似通量体积权重方法的计算流程图

## 参考文献

- [1] 谢仲生. 压水堆核电厂堆芯燃料管理计算与优化[M]. 中国 北京: 原子能出版社, 2008.
- [2] 李乃成, 梅立泉. 数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2011.9.
- [3] 高盛楠: 群常数接口处理程序 Lilac 使用手册 [R]. 中国 西安: 西安交通大学, 2014.
- [4] Dilber I, Lewis EE. Two dimensional variational coarse mesh methods [C]. Proceedings of ANS Topical Meeting on Reactor Physics and Shielding, Chicago, IL, USA, September 17-19, 1984.
- [5] Lewis EE, Miller WF Jr. Computational methods of neutron transport [M], NY, USA: John Wiley & Sons Inc., 1984.
- [6] Lewis EE, Dilber I. Finite element, nodal and response matrix methods: a variational synthesis for neutron transport [J]. Progress of Nuclear Energy, 1986, 18:63-74.
- [7] Lewis EE. Interface angular coupling reductions in variational nodal methods for neutron transport [J]. Nuclear Science Engineering, 1989, 102:140-152.
- [8] Carrico CB, Hanebutte UR, Lewis EE. Comparison of space-angle approximation in response matrix algorithms [C]. Proceeding of Joint International Conference on mathematical methods on supercomputing in nuclear applications, Karlsruhe, Germany, April 19-23, 1993.
- [9] Laurin-Kovitz KF, Lewis EE. Variational nodal transport perturbation theory [J]. Nuclear Science Engineering, 1996, 123:369-380.
- [10] Smith MA. A Three-dimensional nodal neutron transport program with the ability to handle spatial heterogeneities [D]. MI USA: University of Missouri-Rolla, 2001.
- [11] Lewis EE, Carrico CB, Palmiotti G. Variational nodal formulation for the spherical harmonics equations [J]. Nuclear Science Engineering, 1996, 122:194-203.
- [12] 李云召. 基于变分节块法和节块SP3方法的先进堆芯计算方法研究[D]. 中国 西安: 西安交通大学, 2012.
- [13] 谢仲生, 邓力. 中子输运理论数值计算方法[M]. 中国 西安: 西北工业大学出版社, 2005.
- [14] 卢皓亮. 基于三角形网格的中子扩散和输运节块方法研究[D]. 中国 西安: 西安交通大学, 2007.
- [15] W.R.Cobb, R.S.Borland, et al, SIMULATE-E: A Nodal Core Analysis Program for Light Water Reactors.Computer Code User's Manual. EPRI(Report) Mar 1983.

## 附录-空间正交多项式函数系

三维（或二维）的空间正交多项式是由三个（或两个）一维的正交多项式相乘产生的。按照一定算法，程序可以产生以下形式任意阶的一维正交多项式函数系：

$$k_0(x) = 1$$

$$k_1(x) = \sqrt{3}x$$

$$k_2(x) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}x^2$$

$$k_3(x) = -\frac{3\sqrt{7}}{2}x + \frac{5\sqrt{7}}{2}x^3$$

.....

它们满足关系：

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 k_i(x) k_j(x) dx = \delta_{ij}$$

基于以上一维正交多项式函数系，若要产生节块表面上的最高为  $n$  阶的二维正交多项式函数系，则需先产生两组如上形式的一维正交多项式函数系，然后分别取出前  $n$  个正交函数，相乘之后筛选阶数小于或等于  $n$  的二维函数组成最终的二维正交多项式函数系。比如，要产生最高阶数是 2 阶的二维正交多项式函数系，则先产生两组最高阶数为 2 阶的一维正交多项式函数系：

$$k_0(x) = 1, k_1(x) = \sqrt{3}x, k_2(x) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}x^2$$

$$k_0(y) = 1, k_1(y) = \sqrt{3}y, k_2(y) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}y^2$$

在以上两个函数系中各任选一个函数，如现选取了 (5-6) 中的  $k_1(x)$  和 (5-7) 中的  $k_1(y)$  相乘，产生了一个新函数  $3xy$ ，它满足最高阶数是 2 的条件，所以  $3xy$  被筛选为二维正交函数系中的一个函数。同理，当我们选取  $k_1(x)$  和  $k_2(y)$  相乘时，产生的新函数不

满足最高阶数是 2 的条件，那么它将不会成为二维函数系中的函数。按照上述规则，最终产生的二维正交多项式函数系为：

$$h_0(x, y) = 1$$

$$h_1(x, y) = \sqrt{3}x$$

$$h_2(x, y) = \sqrt{3}y$$

$$h_3(x, y) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}x^2$$

$$h_4(x, y) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$h_5(x, y) = 3xy$$

程序在产生三维正交多项式函数系时，基本过程与上述产生二维正交多项式函数系时的过程一致。有一点不同的是其中有两个控制变量：径向展开阶数  $n$  和轴向展开阶数  $m$ ，分别代表节块径向  $(x, y)$  展开的最高阶数和节块轴向  $(z)$  展开的最高阶数。比如，若取  $n=2, m=1$ ，则产生的三维正交多项式函数系为：

$$f_0(x, y, z) = 1$$

$$f_1(x, y, z) = \sqrt{3}x$$

$$f_2(x, y, z) = \sqrt{3}y$$

$$f_3(x, y, z) = \sqrt{3}z$$

$$f_4(x, y, z) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}x^2$$

$$f_5(x, y, z) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$f_6(x, y, z) = 3xy$$

以上便是空间正交多项式函数系产生的基本过程，在程序中对正交多项式函数系的产生共有三个控制变量：节块内标通量密度和源项的径向展开阶数，节块内标通量

密度和源项的轴向展开阶数和节块表面净中子流密度展开阶数。